Fonction exponentielle

Table des Matières

Fonction exponentielle

I. Introduction : définition de la fonction exponentielle

Proposition : (admise) Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Définition

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle, on la note exp :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$$

$\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$

Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}$:

- $\exp(x) > 0$
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

Démonstration 1

- admis
- Dériver la fonction :
  $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(-x)\exp(x) \end{array}$.
  En déduire que la fonction f est constante égale à 1.

II. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Propriété

$\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Démonstration 2

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$ (b est un nombre réel).

1. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = h(x)$ et $h(0) = 1$.
2. En déduire la fonction h et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x+b) = \exp(x)\exp(b)$.

Propriétés

$\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$:

- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(2a) = (\exp(a))^2$,
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$, $n \in \mathbb{N}$,
- $\exp(-na) = \dfrac{1}{exp(na)} = \dfrac{1}{(\exp(a))^n} = \left(\dfrac{1}{\exp(a)}\right)^n = \exp(-a)^n$, $n \in \mathbb{N}$,
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration 3

1) déjà faite, 2) et 3) laissée en exercice, les dernières sont admises

III. Notation e pour la fonction exponentielle

Propriété

$\exp(n) = \exp(1n) = \exp(1)^n$, $n \in \mathbb{Z}$

Définition

On note e le nombre $\exp(1)$.
Avec la calculatrice, on a $e \simeq 2,72$.
Le nombre e entre dans le corpus mathématique, en 1 748, dans l'œuvre maîtresse de Leonhard Euler (1 707-1 783 suisse) *Introductio in analysin infinitorum*.

Propriétés

La dernière propriété précédente permet de justifier la notation $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$:

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \neq 0$,
- $e^0 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$, $e^{a+b} = e^a e^b$,
- $\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $e^{nx} = (e^x)^n$

☞**Exercice 1**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $e^{x+2}e^{-x+1}$
2. $e^{3x} \times \dfrac{e^x}{e^{2x}}$
3. $\dfrac{e^{2x}}{\left(e^{x-1}\right)^2}$
4. $e^{-2x} - \dfrac{(e^x)^2 + 1}{e^{2x}}$

☞**Exercice 2**

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$ est une fonction constante.

IV. Étude analytique de la fonction exponentielle

IV. A. Variation

Propriétés

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

☞**Démonstration 4**

Laissée en exercice

Propriétés

Les propriétés suivantes se déduisent de la propriété précédente :

- $\forall x \leqslant 0, 0 < e^x \leqslant 1$,
- $\forall x \geqslant 0, e^x \geqslant 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$e^x = e^y \Longleftrightarrow x = y$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$e^x < e^y \Longleftrightarrow x < y$$

☞**Exercice 3**

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $e^{x+2} = e^{2x}$
2. $e^{-3x} < 0$
3. $3e^{2x} + 2 > 5$

☞**Exercice 4**

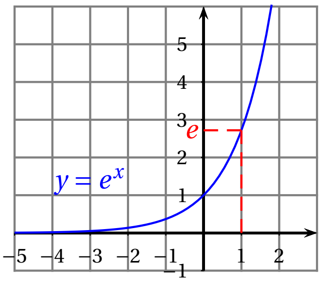
Soit la proposition $\mathscr{P}$: $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} = e^{2x}$.
Dire si la proposition $\mathscr{P}$ est vraie.

☞**Exercice 5**

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$.

IV. B. Tableau de variations de la fonction exponentielle et courbe représentative

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(e^x)' = e^x$		$+$	
e^x	0	$\nearrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$



☞**Exercice 6**

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle en 0.
2. Justifier que la fonction exp est au dessus de toutes ses tangentes. voir figure

V. forme composée

Théorème

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est définie et dérivable sur I et on a :

$$\left(e^u\right)' = u'e^u.$$

En particulier si u est définie pour tout réel x par $u(x) = ax+b$ avec a et b nombre réel,

$$\left(e^{ax+b}\right)' = ae^{ax+b}.$$

☞**Démonstration 5**

Admise

☞**Exercice 7**

Étudier les variations des fonctions composées suivantes :

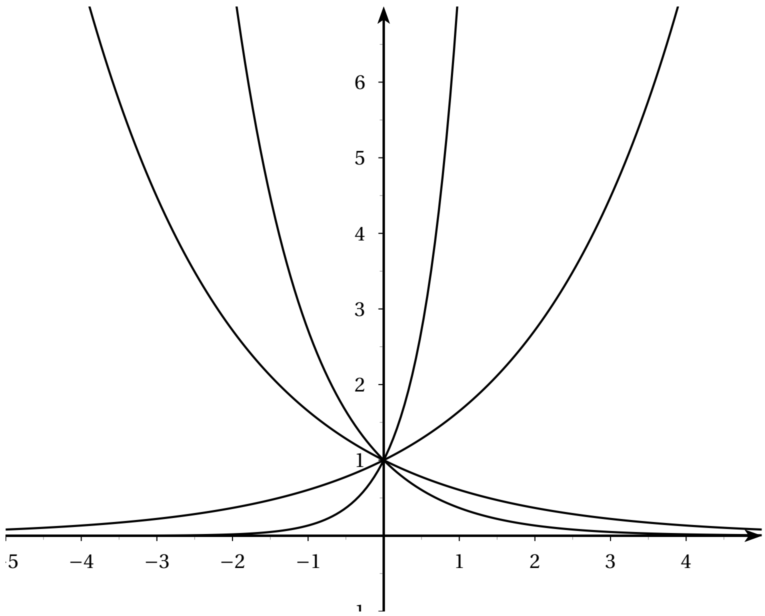
1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x} \end{array}$

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-0,5t+1} \end{array}$

☞Exercice 8

Soit la fonction f définie et dérivables sur $\mathscr{R}$ par $f_k(x) = e^{kx}$ où k est un nombre réel non nul.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe associée à f_k dans un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f_k.
2. Soient deux réels k et k' tels que $k < k'$.
   Pour tout réel x comparer f_k et $f_{k'}$
3. Justifier que $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{-k}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées $\left(O\,;\ \overrightarrow{j}\right)$.
4. Sur le graphique suivant on a reconnaître $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_{\frac{-1}{2}}$ et $\mathscr{C}_{-1}$.



☞Exercice 9

Soit le suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{na}$ où a est un nombre réel.

- Justifier que la suite (u_n) est géométrique, donner le premier terme u_0 et la raison de la suite.
- Déterminer les variations de la suite (u_n).