Dérivation
Variations d'une fonction

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Fonctions dérivées des fonctions de références

m et p sont des réels, n un entier naturel non nul.

Domaine de définition de f	$f(x)$	Domaine de définition de f'	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	p	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	$mx+p$	$\mathbb{R}$	m
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$\mathbb{R}$	x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$\mathbb{R}$	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

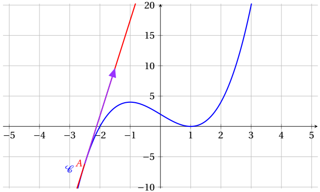
Fonctions dérivées, opérations de bases

f, u, v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I, v est non nulle sur I lorsque v est un dénominateur et λ, m et p sont deux réels :

Opérations	dérivées
$\lambda.u$	$\lambda.u'$
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$f(mx+p)$	$mf'(mx+p)$

Dérivation, application aux variations d'une fonction, animation, exemple

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$, on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et $\mathscr{T}_a$ sa tangente au point d'abscisse a dans le repère suivant :

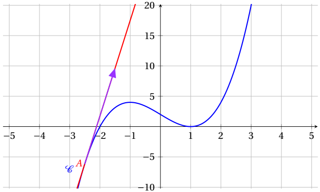


$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}_a$ soit l'ordonnée du vecteur violet d'abscisse 1 qui dirige $\mathscr{T}_a$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dérivation, application aux variations d'une fonction, animation, exemple

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$, on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et $\mathscr{T}_a$ sa tangente au point d'abscisse a dans le repère suivant :



$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}_a$ soit l'ordonnée du vecteur violet d'abscisse 1 qui dirige $\mathscr{T}_a$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, on note f' sa fonction dérivée.

$$(\forall x \in I, f'(x) < 0) \Leftrightarrow (f \text{ strictement décroissante sur } I).$$

$$(\forall x \in I, f'(x) > 0) \Leftrightarrow (f \text{ strictement croissante sur } I).$$

$$(\forall x \in I, f'(x) = 0) \Leftrightarrow (f \text{ constante sur } I).$$

Dérivation, application aux variations d'une fonction, exemple

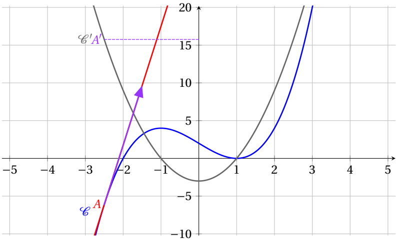
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $\mathbb{R}$ par
$f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$.
Le coefficient de x^2 est positif, on retrouve le tableau de signe de $f'(x)$ qui justifie les variations de f avec le théorème précédent :

x	$+\infty$		-1		1		$-\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dérivation, application aux variations d'une fonction, animation, exemple

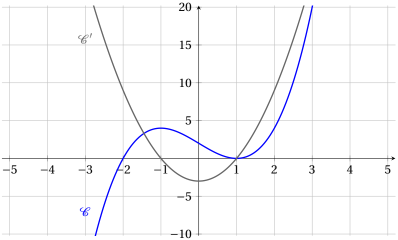
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$, on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et $\mathscr{T}_a$ sa tangente au point d'abscisse a dans le repère suivant. f' est la fonction dérivée de f, $f'(x) = 3x^2 - 3$ représentée par la courbe $\mathscr{C}'$:



x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dérivation, application aux variations d'une fonction, ne pas confondre f et f', exemple

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$, on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et $\mathscr{T}_a$ sa tangente au point d'abscisse a dans le repère suivant. f' est la fonction dérivée de f, $f'(x) = 3x^2 - 3$ représentée par la courbe $\mathscr{C}'$:



x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
f'			$+$		0	$-$	0	$+$	
f		↗	0	↗	4	↘	0	↗	
f		$-$	0		$+$		0	$+$	

Dérivation, application aux variations d'une fonction, étude des variations, exemple

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-4}{-x+1}$.

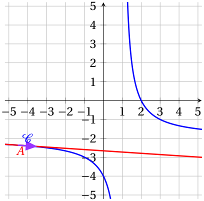
- Calcul de $f'(x)$:
  f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x-4$; $u'(x) = 2$ et $v(x) = -x+1$;
  $v'(x) = -1$.
  $f'(x) = \dfrac{2(-x+1)-(2x-4)\times(-1)}{(-x+1)^2} = \dfrac{-2}{(-x+1)^2}$.
- Signe de $f'(x)$:
  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $-2 < 0$ et $(-x+1)^2 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) < 0$.
- Variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	
f		↘	‖	↘	

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-4}{-x+1}$.

- Variations de f et courbe de f:

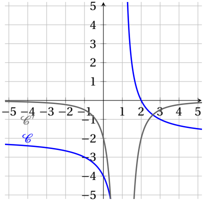
x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	$\|$	$-$	
f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	



Dérivation, application aux variations d'une fonction, ne pas confondre f et f', exemple

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-4}{-x+1}$.

- Courbes des fonctions f et f', signe de f', variations de f et signe de f



x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$-$	‖		$-$		
f		↘	‖	↘	0	↘	
f		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Dérivation, application aux variations d'une fonction, étude des variations, exemple

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$.
$f(x) = ax^2 + bx + 1$.

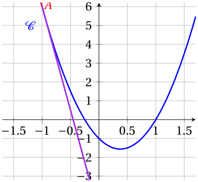
- Calcul de $f'(x)$:
  f est de la forme $u + v$ avec $u(x) = 4x^2$; $u'(x) = 8x$ et $v(x) = -3x - 1$;
  $v'(x) = -3$.
  $f'(x) = 8x - 3$.
- Signe de $f'(x)$: $x \in \mathbb{R}$
  $8x - 3 > 0 \longleftrightarrow x > \dfrac{3}{8}$ et $8x - 3 = 0 \longleftrightarrow x = \dfrac{3}{8} = 0,375 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Variations de f :

x	$-\infty$		0.375		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\longrightarrow$	$f(0.375)$	$\longrightarrow$	

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$.
$f(x) = ax^2 + bx + 1$.

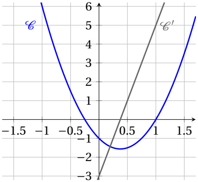
- Variations de f et courbe de f :

x	$-\infty$		0.375		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(0.375)$	$\nearrow$	



Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$.
$f(x) = ax^2 + bx + 1$.

- Courbes des fonctions f et f', signe de f', variations de f et signe de f



x	$-\infty$		-0.25		0.375		1		$+\infty$
f'			$-$		0		$+$		
f			0		$f(0.375)$		0		
f		$+$	0		$-$		0	$+$	

FIN