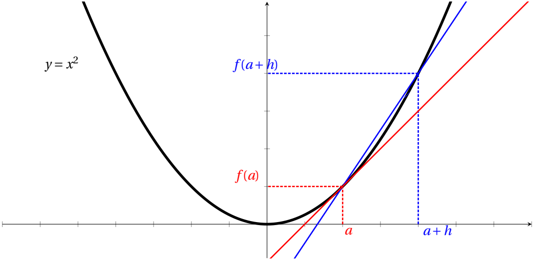
Dérivation
Définition et tangente

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Définition, exemple, animation

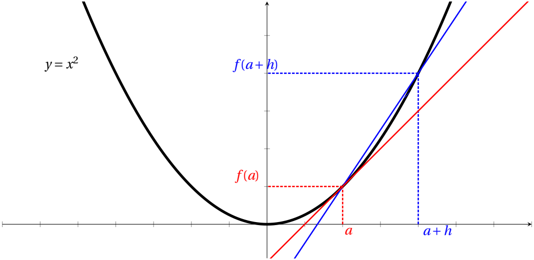
Soit la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
$A(a\,;\,f(a))$ et $A_h(a+h\,;\,f(a+h))$.



Lorsque h tend vers 0, la sécante (AA_h) tend vers la tangente $\mathscr{T}_a$ à la courbe au point d'abscisse a.

Définition, exemple, animation

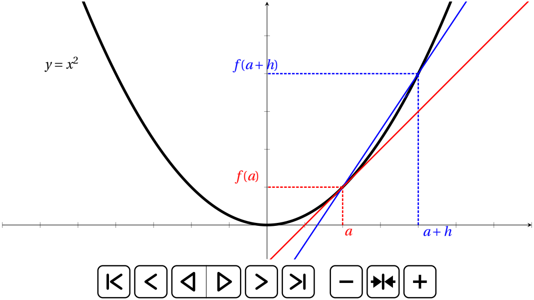
Soit la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
$A(a\,;\,f(a))$ et $A_h(a+h\,;\,f(a+h))$.



Lorsque h tend vers 0,

la pente de la sécante (AA_h) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers la pente de la tangente $\mathcal{T}_a$, notée $f'(a)$ à la courbe au point d'abscisse a.

Soit la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
$A(a\,;\,f(a))$ et $A_h(a+h\,;\,f(a+h))$.



Lorsque h tend vers 0 : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Définition, exemple

Soit la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
$A(a\,;\,f(a))$ et $A_h(a+h\,;\,f(a+h))$.

Lorsque h tend vers 0 : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

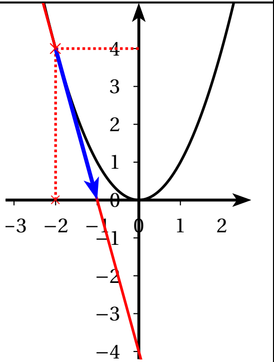
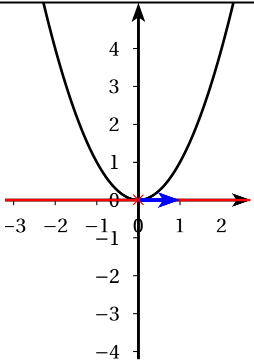
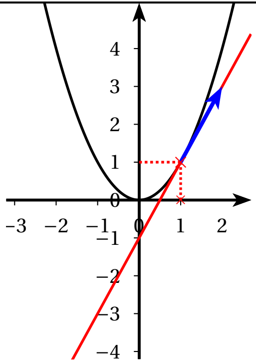
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$$

$$\lim_{h\to 0} 2a+h = 2a = f'(a)$$

ici a est un réel, on dit que la fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(a) = 2a$ qu'on peut noter $f'(x) = 2x$.

Tangente, exemple

Soit la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ et pour a réel, on a $f'(a) = 2a$.

$a = -2$	$a = 0$	$a = 1$
$A(-2\ ;\ 4)$	$A(0\ ;\ 0)$	$A(1\ ;\ 2)$
$f'(-2) = 2 \times (-2) = -4$	$f'(0) = 2 \times 0 = 0$	$f'(1) = 2 \times 1 = 2$
		
$y = -4x - 4$	$y = 0$	$y = 2x - 1$

Soit la fonction cube, définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.
$A(a\,;\,f(a))$ et $A_h(a+h\,;\,f(a+h))$.

Lorsque h tend vers 0 : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3-a^3}{h} = \frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-a^3}{h}$$

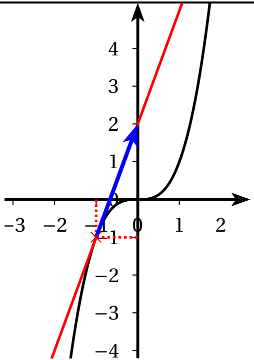
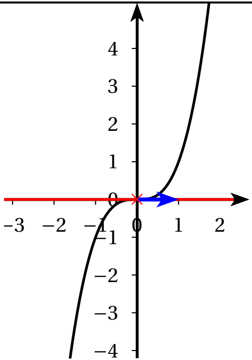
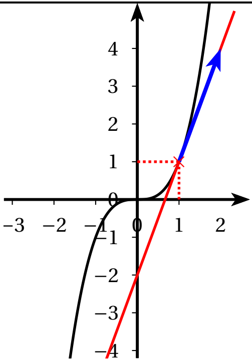
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h} = 3a^2+3ah+h^2$$

$$\lim_{h\to 0} 3a^2+3ah+h^2 = 3a^2 = f'(a)$$

ici a est un réel, on dit que la fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(a) = 3a^2$ qu'on peut noter $f'(x) = 3x^2$.

Tangente, exemple

Soit la fonction cube, définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ et pour a réel, on a $f'(a) = 3a^2$.

$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$A(-1\ ;\ -1)$	$A(0\ ;\ 0)$	$A(1\ ;\ 1)$
$f'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3$	$f'(0) = 3 \times 0^2 = 0$	$f'(1) = 3 \times 1^2 = 3$
		
$y = 3x + 2$	$y = 0$	$y = 3x - 2$

Définition, exemple

Soit la fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$A(a\,;\,f(a))$ et $A_h(a+h\,;\,f(a+h))$.

Lorsque h tend vers 0 : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

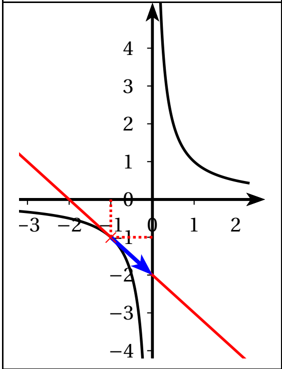
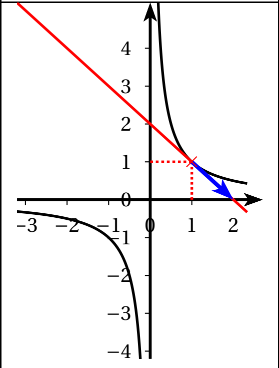
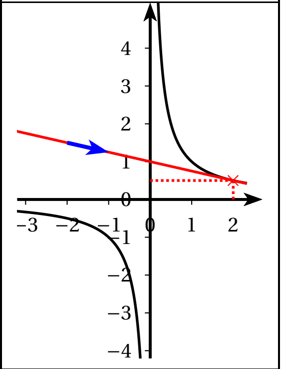
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h} = \frac{\dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{ah(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2} = f'(a)$$

ici a est un réel non nul, on dit que la fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$ qu'on peut noter $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Tangente, exemple

Soit la fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et pour a réel non nul, on a $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

$a = -1$	$a = 1$	$a = 2$
$A(-1\ ;\ -1)$	$A(1\ ;\ 1)$	$A(2\ ;\ 0,5)$
$f'(-1) = -1$	$f'(1) = -1$	$f'(2) = -0,25$
		
$y = -x - 2$	$y = -x + 2$	$y = -0,25x + 1$

Définition, exemple

Soit la fonction racine carrée, définie sur $\mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$.

$A(a\,;\,f(a))$ et $A_h(a+h\,;\,f(a+h))$.

Lorsque h tend vers 0 : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

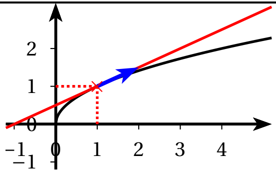
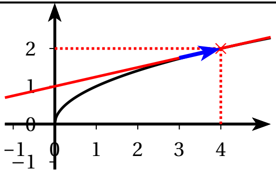
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{a}} = f'(a)$$

ici a est un réel strictement positif, on dit que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ qu'on peut noter $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Soit la fonction racine carrée, définie sur $\mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{x}$ et pour a réel strictement positif, on a $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

$a = 1$	$a = 4$
$A(1\ ;\ 1)$	$A(4\ ;\ 2)$
$f'(1) = 0,5$	$f'(4) = 0,25$
	
$y = 0,5x + 0,5$	$y = 0,25x + 1$

Définition, exemple

Soit la fonction affine, définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$, m et p sont des réels.

$A(a\,;\,f(a))$ et $A_h(a+h\,;\,f(a+h))$.

Lorsque h tend vers 0 : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{m(a+h) + p - (ma+p)}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

$$\lim_{h \to 0} m = m = f'(a)$$

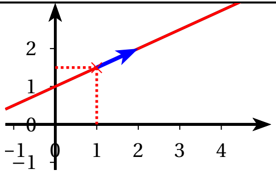
ici a est un réel, on dit que la fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(a) = m$ qu'on peut noter $f'(x) = m$.

Soit la fonction affine, définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) = 0,5x + 1$ et pour a réel on a $f'(a) = 0,5$.

$a = 1,5$

$A(1\ ;\ 1,5)$

$f'(1) = 0,5$



$y = 0,5x + 1$

Fonctions dérivées des fonctions de références

m et p sont des réels, n un entier naturel non nul.

Domaine de définition de f	$f(x)$	Domaine de définition de f'	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	p	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	$mx+p$	$\mathbb{R}$	m
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$\mathbb{R}$	x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$\mathbb{R}$	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

FIN