Dérivation
Opérations de base, calculs

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Fonctions dérivées des fonctions de références

m et p sont des réels, n un entier naturel non nul.

Domaine de définition de f	$f(x)$	Domaine de définition de f'	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	p	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	$mx+p$	$\mathbb{R}$	m
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$\mathbb{R}$	x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$\mathbb{R}$	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Opérations, multiplication d'une fonction dérivable par un nombre réel

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.
λ est un nombre réel.

Soit a un réel de I : on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$

$\dfrac{\lambda.u(a+h)-\lambda.u(a)}{h} = \lambda.\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0} \lambda.\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = \lambda.\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = \lambda.u'(a).$

La fonction $\lambda.u$ est dérivable sur I et $(\lambda.u)' = \lambda.u'$.

Opérations, multiplication d'une fonction dérivable par un nombre réel, exemples

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.
λ est un nombre réel.

La fonction $\lambda.u$ est dérivable sur I et $(\lambda.u)' = \lambda.u'$.

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2$.
  $u(x) = x^2$; $u'(x) = 2x$ et $\lambda = 5$.
  $f'(x) = \lambda u'(x) = 5 \times 2x = 10x$.

- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{3}{x} = 3 \times \dfrac{1}{x}$.
  $u(x) = \dfrac{1}{x}$; $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $\lambda = 3$.
  $g'(x) = \lambda u'(x) = 3 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{3}{x^2}$.

Opérations, somme de deux fonctions dérivables

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Soit a un réel de I :
on a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$

$$\frac{u(a+h)+v(a+h)-(u(a)+v(a))}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)+v(a+h)-v(a)}{h}$$

$$\frac{u(a+h)+v(a+h)-(u(a)+v(a))}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h} \right] =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = u'(a) + v'(a).$$

La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.

Opérations, somme de deux fonctions dérivables, exemples

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.
  $u(x) = x^3$; $u'(x) = 3x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$; $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
  $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2 + \dfrac{\sqrt{x}}{2x} = \dfrac{6x^3 + \sqrt{x}}{2x}$.
- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x^2 + 6x - 7$.
  $u(x) = 5x^2$; $u'(x) = 10x$ et $v(x) = 6x - 7$; $v'(x) = 6$.
  $g'(x) = u'(x) + v'(x) = 10x + 6$.

Opérations, produit de deux fonctions dérivables

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Soit a un réel de I :
on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$

$$\frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h).v(a+h)-u(a).v(a+h)+u(a).v(a+h)-u(a).v(a)}{h}$$

$$= v(a+h).\frac{u(a+h)-u(a)}{h} + u(a).\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left[v(a+h).\frac{u(a+h)-u(a)}{h} + u(a).\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} v(a+h).\frac{u(a+h)-u(a)}{h} + u(a).\lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

$$= v(a).u'(a) + u(a).v'(a)$$

La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u.v)' = v.u' + u.v'$.

Opérations, produit de deux fonctions dérivables, exemples

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u.v)' = v.u' + u.v'$.

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.
  $u(x) = x\,;\ u'(x) = 1$ et $v(x) = \sqrt{x}\,;\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
  $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$
- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x(-x+1)$.
  $u(x) = x\,;\ u'(x) = 1$ et $v(x) = -x+1\,;\ v'(x) = 1$.
  $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times (-x+1) + (-1) \times x = -2x+1$.
- Remarque : $g(x) = x(-x+1) = -x^2 + x$; forme $(u+v)' = u' + v'$
  $u(x) = -x^2\,;\ u'(x) = -2x$ et $v(x) = x\,;\ v'(x) = 1$.
  $g'(x) = u'(x) + v'(x) = -2x+1$.

Opérations, inverse d'une fonction dérivable

v est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I.

Soit a un réel de I :
on a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$

$$\frac{\dfrac{1}{v(a+h)} - \dfrac{1}{v(a)}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{v(a)-v(a+h)}{v(a+h).v(a)}}{h}$$
$$= \frac{v(a)-v(a+h)}{h.v(a+h).v(a)} = -\frac{v(a+h)-v(a)}{h.v(a+h).v(a)} = -\frac{v(a+h)-v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a+h).v(a)}$$

$$\lim_{h \to 0} \left[-\frac{v(a+h)-v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a+h).v(a)} \right]$$
$$= -v'(a) \times \frac{1}{v(a)^2} = \frac{-v'(a)}{v(a)^2}$$

La fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Opérations, inverse d'une fonction dérivable, exemples

v est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I.

La fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

  $v(x) = \sqrt{x}$; $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

  $$f'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}.$$

- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

  $v(x) = x^2 + 1$; $v'(x) = 2x$.

  $$g'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Opérations, quotient de deux fonctions dérivables

u est une fonction dérivable sur I et v est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I.

La dérivée d'un produit deux deux fonctions dérivables : $(uv)' = u'v + uv'$ soit $(uw)' = u'w + uw'$.
$\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$.
On pose $w = \dfrac{1}{v}$ on a $w' = -\dfrac{1}{v^2}$.
$$\left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u'.w + u.w' = u'.\frac{1}{v} + u \times \left(\frac{-v'}{v^2}\right) = \frac{u'.v}{v^2} + \left(\frac{-u.v'}{v^2}\right) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Opérations, quotient de deux fonctions dérivables, exemples

u est une fonction dérivable sur I et v est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I.

La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$.

  $u(x) = x\,;\ u'(x) = 1$ et $v(x) = \sqrt{x}\,;\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

  $$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = \frac{1 \times \sqrt{x} - x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\dfrac{2x - x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x}{2x\sqrt{x}}$$

  $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

  Remarque : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

Opérations, quotient de deux fonctions dérivables, exemples

u est une fonction dérivable sur I et v est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I.

La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3x+5}{-2x+1}$.

  $u(x) = 3x+5$; $u'(x) = 3$ et $v(x) = -2x+1$; $v'(x) = -2$.

  $$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = \frac{3(-2x+1) - (3x+5)\times(-2)}{(-2x+1)^2}$$

  $$g'(x) = \frac{-6x+3+6x+10}{(-2x+1)^2} = \frac{13}{(-2x+1)^2}$$

Opérations, composition d'une fonction dérivable par $mx+p$, exemples

f est une fonction dérivable sur I.

On admet :
La fonction $x \longmapsto f(mx+p)$ est dérivable sur I et $\left(f(mx+p)\right)' = mf'(mx+p)$.

La fonction $x \longmapsto f(mx+p)$ est dérivable sur I et
$\left(f(mx+p)\right)' = mf'(mx+p)$.

- Soit la fonction g définie sur $\left]\dfrac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par $g(x) = \sqrt{3x-4}$.
  On remarque la forme $\sqrt{3x-4} = f(3x-4)$ avec $f(x) = \sqrt{x}$ et
  $mx+p = 3x-4$.
  $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
  $g'(x) = mf'(mx+p) = 3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{3x-4}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-4}}$.

Opérations, composition d'une fonction dérivable par $mx+p$, exemples

f est une fonction dérivable sur I.

La fonction $x \longmapsto f(mx+p)$ est dérivable sur I et $\big(f(mx+p)\big)' = mf'(mx+p)$.

- Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (5x-7)^2$.
  On remarque la forme $(5x-7)^2 = f(5x-7)$ avec $f(x) = x^2$ et $mx+p = 5x-7$.
  $f'(x) = 2x$.
  $g'(x) = mf'(mx+p) = 5 \times 2 \times (5x-7) = 50x-70$.
- On remarque : $h(x) = (5x-7)^2 = 25x^2 - 70x + 49$; forme $(u+v)' = u' + v'$
  $u(x) = 25x^2$; $u'(x) = 2 \times 25x = 50x$ et $v(x) = -70x+49$; $v'(x) = -70$.
  $g'(x) = u'(x) + v'(x) = 50x-70$.

f, u, v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I, v est non nulle sur I lorsque v est un dénominateur et λ, m et p sont deux réels :

Opérations	dérivées
$\lambda.u$	$\lambda.u'$
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$f(mx+p)$	$mf'(mx+p)$

FIN