Dérivation, différentiel, tangente

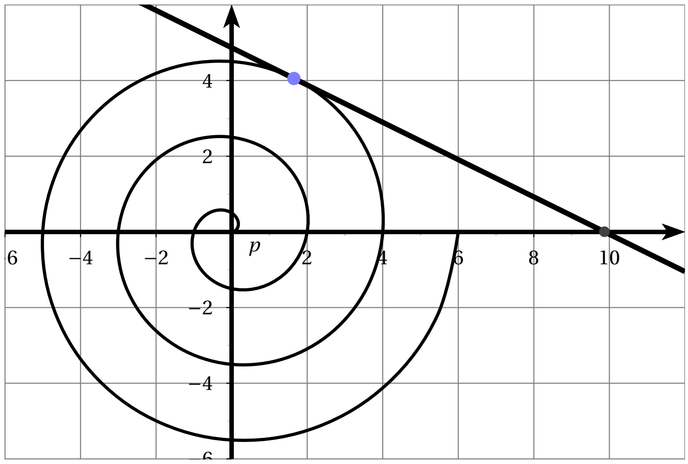
Table des Matières

☙ Dérivation, différentiel, tangente ❧

I. Introduction

I. A. Approche historique

Dès l'antiquité, les Grecs s'intéressaient à la détermination des tangentes à des courbes. Ainsi Archimède (287-212 av. J.-C.) propose une construction de la tangente en un point d'une spirale.
Archimède donne une définition cinématique de sa spirale :
Si une ligne droite est menée dans un plan, et si, l'une de ses extrémités restant fixe, elle tourne un nombre quelconque de fois d'un mouvement uniforme, reprenant la position d'où elle est partie, tandis que, sur la ligne en rotation, un point se meut uniformément comme elle à partir de l'extrémité fixe, le point décrira une spirale dans le plan. Il donnera ensuite plusieurs propositions qui caractérisent les tangentes à cette spirale.



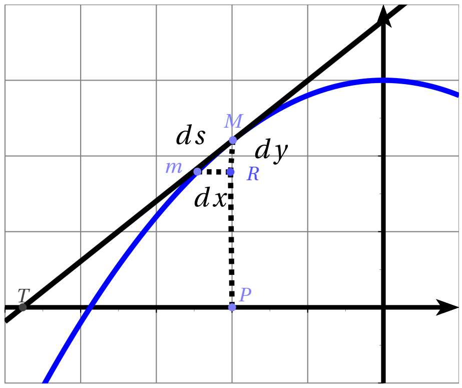
Mais, il faut attendre la première moitié du XVII^{e} siècle siècle avec René Descartes (1 596-1 650), Pierre de Fermat (1 607-1 665) et Gilles Personne de Roberval (1 602-1 665), pour voir apparaître des méthodes plus générales de détermination de tangentes.
Ces méthodes donneront naissance au calcul différentiel développé séparément par Gottfried Wilhelm Leibniz (1 646-1 716 allemand) dans son traité *Nouvelle méthode pour chercher les maxima, les minima, ainsi que les tangentes* et par le mathématicien, physicien et astronome Isaac Newton (1 642-1 727).

Voici la définition que donne l'Encyclopédie Méthodique de Diderot et D'Alembert (écrite entre 1 751 et 1 772). *Différentielle, adj.*
On appelle dans la haute Géométrie, quantité différentielle ou simplement différentielle, une quantité infiniment petite, ou moindre que toute grandeur assignable.
On l'appelle différentielle ou quantité différentielle, parce qu'on la considère ordinairement comme différence infiniment petite de deux quantités finies, dont l'une surpasse l'autre infiniment peu. Newton et les anglais l'appellent fluxion, à cause qu'ils la considèrent comme l'accroissement momentané d'une quantité. Leibnitz (*) et d'autres l'appellent aussi une quantité infiniment petite. Calcul différentiel ; c'est la manière de différentier les quantités, c'est-à-dire de trouver la différence infiniment petite d'une quantité finie variable.
Cette méthode est l'une des plus belles et des plus fécondes de toutes les Mathématiques ; M. Leibnitz qui l'a publiée le premier, l'appelle calcul différentiel, en considérant les grandeurs infiniment petites comme les différences des quantités finies ; c'est pourquoi il les exprime par la lettre d qu'il met au devant de la quantité différentiée ; ainsi la différentielle de x est exprimée par dx, celle de y par dy, etc.
M. Newton appelle le calcul différentiel, méthode des fluxions, parce qu'il prend, comme on l'a dit, les quantités infiniment petites pour des fluxions ou des accroissements momentanés. Il considère, par exemple, une ligne comme engendrée par la fluxion d'un point, une surface par la fluxion d'une ligne, un solide par la fluxion d'une surface ; et au lieu de la lettre d, il marque les fluxions par un point mis au dessus de la grandeur différentiée. Par exemple, pour la fluxion de x, il écrit $\ddot{x}$, pour celle de y, $\ddot{y}$ etc. C'est ce qui fait la seule différence entre le calcul différentiel et la méthode des fluxions ...
(*) D'Alembert écrit Leibnitz plutôt que Leibniz.
Si les travaux de Newton sont remarquables, ce sont ceux de Leibniz qui ont prévalu en mathématiques et en physique grâce aux notations plus adaptées.
Le calcul différentiel apparut d'emblée pour les mathématiciens et les physiciens comme un outil puissant. Avec des règles de calcul relativement simples, il permit en premier lieu de répondre aux questions des Grecs, en trouvant des équations d'une tangente à une courbe.

La ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites chacune infiniment petite, la pente de la tangente à une courbe en un point M est donnée par :

$$\frac{PM}{PT} = \frac{RM}{Rm} = \frac{dx}{dy}$$

.



Le calcul différentiel permit alors aux physiciens de déterminer la vitesse d'évolution d'un phénomène.
Ce n'est qu'au XIX^{e} siècle que les analystes remplacent les vagues concepts d'infiniment petits par des notions solides et rigoureuses, fondées sur des quantités finies. Le mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1 789-1 857) définit avec précision la notion de limite. Son cours donné à l'École Polytechnique devient la référence de l'analyse. Il faudra attendre le XX^{e} siècle pour que les quantités infinitésimales soient complètement légitimées.

I. B. Approche cinématique

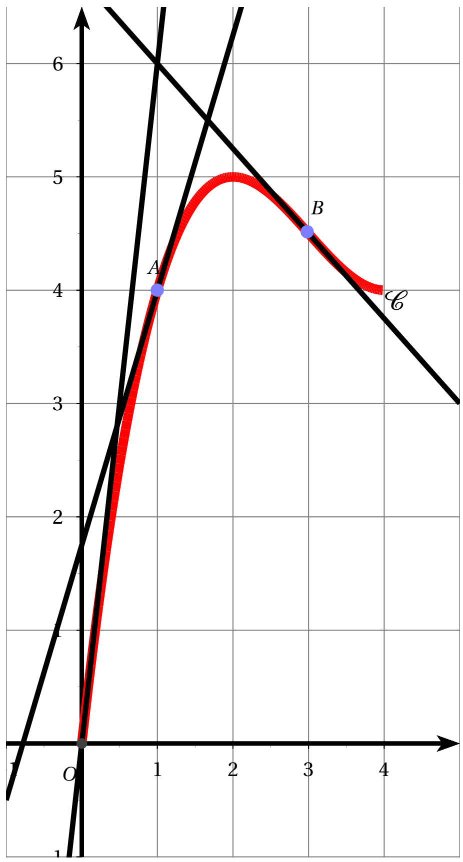
☞**Activité 1**

Un mobile se déplace en ligne droite, on relève son abscisse x, exprimé en mètre en fonction du temps t, exprimé en seconde. On obtient $x = \frac{1}{4}t^3 - \frac{9}{4}t^2 + 6t$ avec $t \in [0\,;\,4]$.

On définit une fonction f dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-contre :

$$\begin{array}{rccl} f: & [0\,;\,4] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{4}t^3 - \frac{9}{4}t^2 + 6t \end{array}$$

En chaque point de la courbe $\mathscr{C}$, on lit la vitesse v instantanée, exprimée en $m.s^{-1}$, qui dépend du temps t qui est la pente de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en ce point.



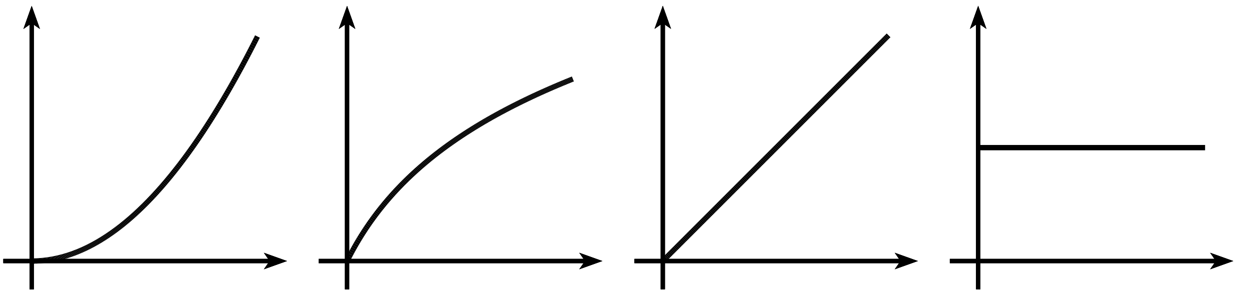
1. Lire graphiquement la distance parcourue par le mobile à l'instant $t = 0$, puis sa vitesse $v(0)$ (vitesse initiale).
2. Lire graphiquement la distance parcourue par le mobile à l'instant $t = 1$, puis sa vitesse $v(1)$.
3. Lire graphiquement la distance parcourue par le mobile à l'instant $t = 3$, puis sa vitesse $v(3)$.
4. À quel(s) instant(s) la vitesse est nulle ? Quelle distance à parcourue le mobile à ce(s) instant(s) ?

☞**Activité 2**

On donne le déplacement x de quatre mobile sur une droite suivant le même temps t par les 4 courbes de trajectoires ci-contre : Parmi ces mobiles, lequel a :

1. la plus grande vitesse initiale ?
2. une vitesse nulle à tout les instants,
3. une vitesse constante non nulle,
4. une vitesse croissante (une accélération positive)

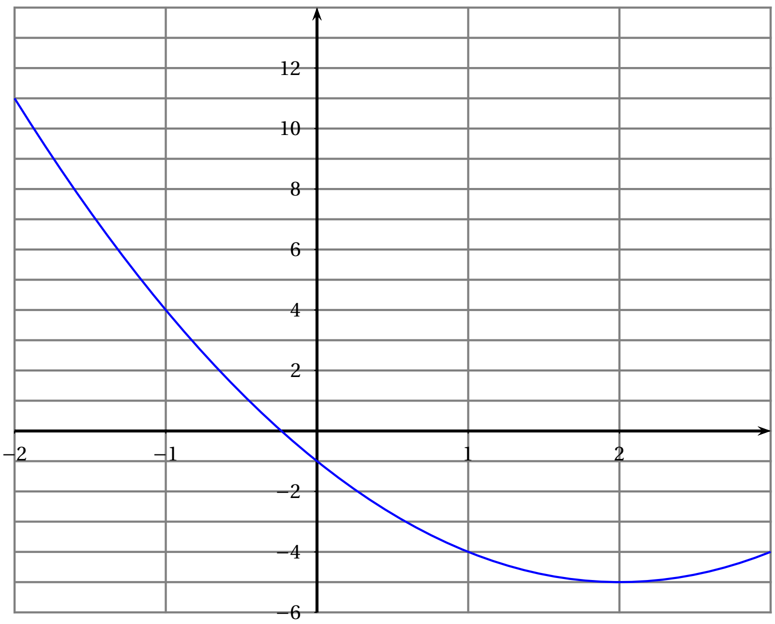
Mobile 1 Mobile 2



I. C. Approche mathématique

☞**Activité 3**

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = x^2 - 4x - 1$. On note $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction f dont on donne la représentation dans le repère suivant :



1. Placer le point A de la courbe dont l'abscisse est -1, puis le point A_h d'abscisse $-1+h$ pour $h = 2$.
   Tracer la droite (AA_h).
   Tracer la droite (AA_h) pour $h = 1$.
2. Soit h un nombre de l'intervalle $[0;2]$, et A_h le point d'abscisse $-1+h$. Calculer, en fonction de h, la pente $\tau(h)$ de la droite (AA_h).
3. De quel nombre se rapproche $\tau(h)$ lorsque h est très proche de 0 ? Que pouvez-vous dire alors de la droite (AA_h) ?

II. Nombre dérivé et tangente à une courbe

II. A. Nombre dérivé

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I, avec $y = f(x)$, et a un nombre réel de I.
On dit que f est dérivable en a si la limite du taux d'accroissement $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand x tend vers a est finie, on notera cette limite $f'(a)$.
$f'(a)$ est appelé nombre dérivé de f en a.
Les équivalences suivantes sont admises :

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \\ \iff & \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \end{aligned}$$

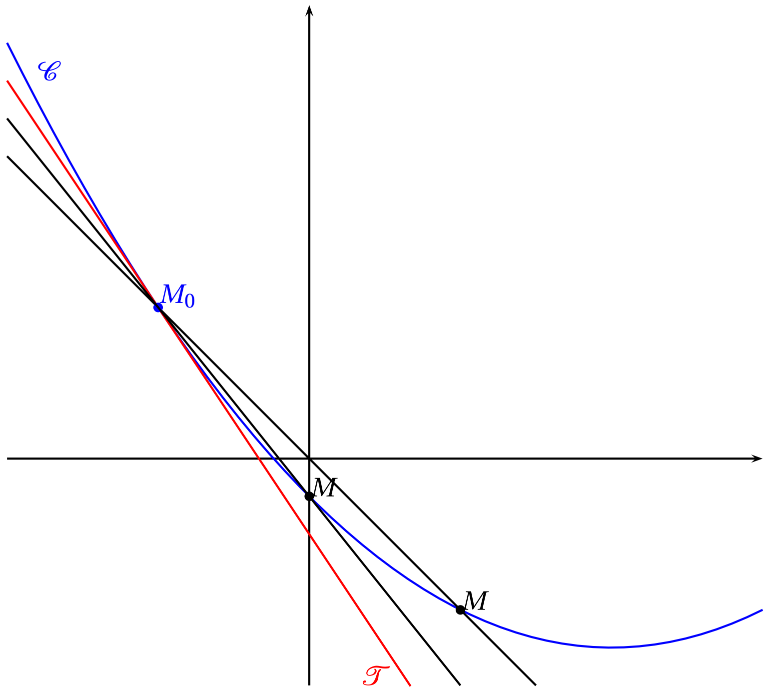
On pose $x = a + h$.

II. B. Interprétation graphique : tangente

Soit une fonction f définie sur un intervalle I, sa représentation dans un repère orthogonal est $\mathscr{C}$; x_0 un nombre de I, $M_0(x_0; f(x_0))$ un point de $\mathscr{C}$. On suppose que f est dérivable en x_0.
Pour tout nombre x distinct de x_0, on note le point $M(x; f(x))$ sur la courbe $\mathscr{C}$. La droite (MM_0) a pour coefficient directeur $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Ainsi le nombre $f'(x_0)$ apparaît être la limite de la pente de la droite (MM_0) lorsque le point M est assez proche du point M_0.

Définition

La droite $\mathscr{T}$ de pente $f'(x_0)$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en M_0.



Théorème

Soit une fonction f définie sur un intervalle I, sa représentation dans un repère orthogonal est $\mathscr{C}$; x_0 un nombre de I, $M_0(x_0; f(x_0))$ un point de $\mathscr{C}$. On suppose que f est dérivable en x_0.
L'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ en x_0 à la courbe $\mathscr{C}$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Démonstration 1

laissée en exercice

Exercice 1

Soit la fonction f définie dans l'activité par $f(x) = x^2 - 4x - 1$.

1. On admet que $f'(-1) = -6$ (valeur trouvée dans l'activité).
Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f, en -1.
2. (a) En calculant la limite du taux d'accroissement pour $a = 2$ lorsque h tend vers 0, déterminer $f'(2)$.
(b) En déduire une équation de la tangente en 2.

Figures associées :

- sécantes et tangente à une courbe :
http://www.geogebratube.org/student/m135431
- tangentes à une courbe
http://www.geogebratube.org/student/m135433
- approximation d'une courbe par une tangente
http://www.geogebratube.org/student/m135462

III. Dériver des fonctions

III. A. Définition

Définition

Une fonction f définie sur un intervalle I, avec $y = f(x)$, est dérivable sur l'intervalle I si elle est dérivable en tout point a de l'intervalle I. On note $\dfrac{dy}{dx}$ ou f' la fonction dérivée de f.

Remarque

La fonction $\dfrac{dy}{dx}$ est très utilisée en sciences physiques, elle a son intérêt de préciser la variable x sur laquelle porte la dérivée, la lecture n'est pas directe dans la notation f'. Avec la notation f', on doit définir au préalable la fonction f.
En mathématiques on trouve la notation $\dfrac{dy}{dx}$ dès lors qu'une fonction f est définie par plusieurs variables.

III. B. Fonctions de référence

✒ Théorème

Les fonctions f suivantes sont dérivables sur l'intervalle I, on note f' leur fonction dérivée, k est une constante réelle :

Intervalle I de f	Fonction f	Intervalle I' de f'	Fonction dérivée f'
$]-\infty\,;\,+\infty[$	k	$]-\infty\,;\,+\infty[$	0
$]-\infty\,;\,+\infty[$	x	$]-\infty\,;\,+\infty[$	1
$]-\infty\,;\,+\infty[$	$mx+p$	$]-\infty\,;\,+\infty[$	m
$]-\infty\,;\,+\infty[$	$x^n\ (n\geqslant 1)$	$]-\infty\,;\,+\infty[$	nx^{n-1}
$]-\infty\,;\,+\infty[\cup]-\infty\,;\,+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;\,+\infty[\cup]-\infty\,;\,+\infty[$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$[0\,;\,+\infty[$	$\sqrt{x}$	$]0\,;\,+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

☞Démonstration 2

Reprendre toutes les fonctions de référence et calculer le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ puis conclure à partir de la limite de ce taux en 0.

✒ Remarque

Pour tous ces points, dans la pratique, la variable a sera remplacée par la variable x, sauf éventuellement pour les tangentes à une courbe en un point d'abscisse a ou x_0.

☞Exercice 2

Déterminer l'équation réduite de la tangente en $x_0 = 1$ à chaque courbe des fonctions de référence.

III. C. Opération sur les fonctions dérivées

Théorème

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}^*$. Les fonctions ku, $u+v$, uv, $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont respectivement dérivables sur I suivant les formules du tableau suivant :

f	f'
ku	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Démonstration 3

Cours

Exercice 3

Identifier les fonctions u, v et le nombre k, puis donner $f'(x)$:

1. $f(x) = x+2+\frac{1}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$
2. $f(x) = 3x^2-7x+1+\frac{1}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$
3. $f(x) = 8x^4$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{3}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$
5. $f(x) = \frac{3x+1}{7x-2}$ sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{7}\right\}$
6. $f(x) = x^3-x-\frac{1}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$
7. $f(x) = x^6-2x^5+3x^4-\frac{2}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$
8. $f(x) = 5+\frac{4x}{2x-1}$ sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Théorème

Soit une fonction g définie et dérivable sur un intervalle I.
On définit la fonction f par :

$$f: \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(ax+b) \end{array}$$

avec a et b des nombres réels.
La fonction f est dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = ag'(ax+b)$$

Démonstration 4

Admise

☞**Exercice 4**

Calculer les dérivées suivantes, les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et ont pour variable x.

1. $f(x) = \sqrt{2x+1}$
2. $g(x) = (-0,5x+3)^3$

IV. Application aux fonctions dérivées

IV. A. Sens de variation d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, on note f' sa fonction dérivée.

- $(\forall x \in I, f'(x) < 0) \Leftrightarrow (f$ strictement décroissante sur $I)$.
- $(\forall x \in I, f'(x) > 0) \Leftrightarrow (f$ strictement croissante sur $I)$.
- $(\forall x \in I, f'(x) = 0) \Leftrightarrow (f$ constante sur $I)$.

Figure animée associée :
http://www.geogebratube.org/student/m135468

☞**Exercice 5**

Pour chacune des fonctions, étudier le sens de variations sur un ensemble I approprié, vérifier vos réponses à l'aide de la calculatrice et d'une fenêtre appropriée.

1. $f(x) = x^2 - 5x + 2$
2. $f(x) = \dfrac{3x+1}{5x-2}$
3. $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{3}{2x+3}$
4. $f(x) = x - \sqrt{x}$
5. $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}x - 1\right)^3$
6. $f(x) = \sqrt{2x+5}$

IV. B. Recherche d'extremum

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I =]a;b[$, on note f' sa fonction dérivée.
Soit $x_0 \in I$,

- $f(x_0)$ est un maximum sur I si et seulement si
  $(f'(x_0) = 0)$ et $(\forall x < x_0\ ;\ f'(x) > 0)$ et $(\forall x > x_0\ ;\ f'(x) < 0)$.
- $f(x_0)$ est un minimum sur I si et seulement si
  $(f'(x_0) = 0)$ et $(\forall x < x_0\ ;\ f'(x) < 0)$ et $(\forall x > x_0\ ;\ f'(x) > 0)$.

☞**Exercice 6**

1. Soit la fonction cube f, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3$, montrer que $f'(0) = 0$ et que $f(0)$ n'est pas un extremum.

2. Soit la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, montrer que la fonction f admet un extremum local.

figures de l'exercice :