Les suites
exercices

1 Exercice

A partir du 1^{er} janvier 2014 on souhaite placer 3000 euros à intérêt composé, de taux annuel de $2,5\%$.
On note u_n la somme disponible la n^{eme} année soit la somme disponible le 1^{er} janvier 2014$+n$. On a $u_0 = 3000$.
Note : les intérêts composés annuels sont calculés sur la somme disponible l'année précédente.

1. Calculer u_1, u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite u.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. A partir de quelle année la somme dépassera 4000 euros ? Justifier de deux manières.
5. Faire deux algorithmes qui permettent de déterminer le rang de l'année pour une somme à dépasser saisie par l'utilisateur. Mettre en forme les algorithmes sur Python, et sur tableur.

2 Exercice

A partir du 1^{er} janvier 2014 on a le choix de placer 1000 euros à intérêt composé, de taux annuel de $3,5\%$ ou 1000 euros à intérêt simple, de taux annuel 4%
On note u_n la somme disponible sur le compte à intérêt composé la n^{eme} année soit la somme disponible le 1^{er} janvier 2014$+n$. On a $u_0 = 1000$.
On note v_n la somme disponible sur le compte à intérêt simple la n^{eme} année soit la somme disponible le 1^{er} janvier 2014$+n$. On a $v_0 = 1000$.
Note : les intérêts composés annuels sont calculés sur la somme disponible l'année précédente et les intérêts simples annuels sont calculés sur la somme disponible au début des opérations financières (ici, le placement en 2014).

1. Calculer u_1, u_2 ; puis v_1, v_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite u. Puis exprimer u_n en fonction de n.
3. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire la nature de la suite v. Puis exprimer v_n en fonction de n.
4. Suivant les valeurs de n, déterminer le placement le plus intéressant. Justifier.
5. Faire un algorithme qui permet de déterminer le rang de l'année pour trouver le rang de l'année de la question précédente. Mettre en forme l'algorithme sur Python, et sur tableur.

3 Exercice

A partir du 1^{er} janvier 2014 on place 5000 euros à intérêt composé, de taux annuel de 2%
Le 1^{er} janvier de chaque année on décide de placer 1000 en plus de la somme disponible (à partir de 2015). On note u_n la somme disponible sur le compte à intérêt composé la n^{eme} année soit la somme disponible le 1^{er} janvier 2014$+n$. On a $u_0 = 5000$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Donner un algorithme qui permet de déterminer la somme disponible la n^{eme} année. Le mettre en forme sur Python et sur tableur.
3. On pose $v_n = u_n + a$.
   (a) Déterminer le nombre a de telle manière que la suite v soit une suite géométrique de raison 1,02.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire u_n en fonction de n.

4. Déterminer l'année à partir de laquelle le placement aura plus que doublé. Justifier.
5. Faire un algorithme qui permet de déterminer le rang de l'année pour une somme à dépasser saisie par l'utilisateur. Mettre en forme l'algorithme sur Python, et sur tableur.

Note : la suite u est appelée suite arithmético-géométrique.

4 Exercice

Pour chaque cas, faire un algorithme mis en forme sur Python qui permet à un utilisateur de déterminer sur un nombre d'année n, suivant un taux t, sa somme disponible et les intérêts après un placement d'une somme S.

1. Avec des intérêts simples
2. Avec des intérêts composés
3. Avec des intérêts composés et un ajout annuel d'une somme s constante.

5 Exercice

Dans une banque, le remboursement d'un prêt de 11500 euros au taux de 4% sur 3 ans, à annuité constante est établi dans le tableau suivant (les arrondis sont à l'unité d'euro) :

Année	Somme à rembourser	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	11500	460	3684	4144
2	7816	313	3831	4144
3	3985	159	3985	4144
	Total	932	11500	12432

Le but de l'exercice est de trouver la formule de l'annuité a constante dans le cas général, pour un emprunt donné S_0, un taux donné t et une durée donnée n, puis de concevoir un tableau d'amortissement sur Python.

1. Quelques remarques ou conjectures sur l'exemple donné.
   (a) Expliquer comment on calcule la colonne "intérêts" connaissant la somme à rembourser.
   (b) Expliquer comment on calcule la colonne "Amortissement" connaissant les intérêts annuels et l'annuité constante. Qu'est-ce que la somme des amortissements ?
   (c) Deux calculs (simples) dans le tableau permettent de trouver le total 12432. Lesquels ?
   (d) Conjecturer que la suite des amortissements est géométrique. Quelle serait la raison ?

2. Le cas général : on note S, I, A les suites respectives de la somme à rembourser, des intérêts, de l'amortissement et on note a l'annuité constante à déterminer :

Année	Somme à rembourser	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	S_0	I_1	A_1	a
...	...	...	...	...
n	S_{n-1}	I_n	A_n	a
	Total	$\sum_{i=1}^{n} I_i$	$\sum_{i=1}^{n} A_i$	na

Avec $S_n = 0$, $\sum_{p=1}^{n} A_p = S_0$. On notera t le taux d'emprunt. Soit $p \in \mathbb{N} \cap [1; n]$

   (a) Exprimer I_p en fonction de S_{p-1} et du taux t.

   (b) Par définition de l'amortissement, on a $A_p = a - I_p$. Exprimer A_p en fonction de a et S_{p-1} et du taux t.

   (c) Par définition de l'échéance à rembourser (somme à rembourser), on a $S_p = S_{p-1} - A_p$. A l'aide de la question précédente, montrer que la suite A est géométrique de raison $1 + t$ (on pourra exprimer A_{n+1} en fonction de A_n).

   (d) Avec la formule de la somme des suites géométriques, montrer que $\sum_{p=1}^{n} A_p = A_1 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$. En exprimant A_1 en fonction de S_0, a et t, et en utilisant la remarque $\sum_{p=1}^{n} A_p = S_0$, Montrer la formule de l'annuité constante : $a = S_0 \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

3. On remarque qu'un emprunt dépend de deux variables. Lesquels ?

4. Proposer un algorithme qui donne sous forme de listes : La somme à rembourser, les intérêts, les amortissements, l'annuité constante d'un emprunt d'une somme S, de taux t, et de durée n. Le mettre en forme sur tableur.

6 Exercice

Une entreprise propose deux évolutions de salaires :
une augmentation de 28 euros par an ou une augmentation de 2% par an.
Après avoir décrit les deux suites, comparer les deux salaires suivant l'année, puis la somme des salaires suivant l'année. Mettre en place un algorithme de recherche du meilleur salaire sur Python et sur tableur.

7 Exercice

1. Soit le suite u géométrique de raison 1,02 et de premier terme $u_0 = 5$. Donner un algorithme qui permet de trouver le plus petit entier n à partir du quel pour tout entier n, $u_n > 1000$. Déterminer la limite de la suite u.

2. Soit le suite v géométrique de raison 0,98 et de premier terme $v_0 = 5$. Donner un algorithme qui permet de trouver le plus petit entier n à partir du quel pour tout entier n, $v_n < 0,0001$. Déterminer la limite de la suite v.

3. Soit la suite géométrique w telle que pour tout entier naturel i, $w_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ et la suite de la somme pour tout entier n, $W_n = \sum_{i=0}^{n} w_i$.

   (a) Donner la limite de la suite w.

   (b) Sur tableur, conjecturer la limite de la suite W_n. Trouver alors un algorithme permettant de justifier cette limite.