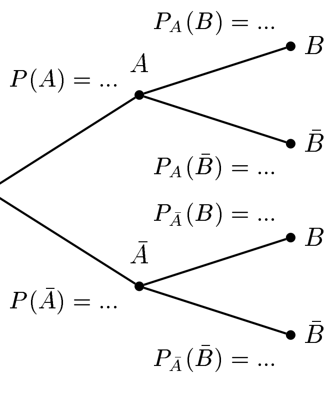
Probabilités conditionnelles

1 Introduction par les fréquences en ligne et en colonne

Activité :
Dans une agence de voyage, on observe les réservations destinations suivantes :

	Europe	Reste du monde	Total
En famille	200	50	
En couple	600	350	
Total			

1. Recopier et compléter le tableau.
2. On choisit au hasard une fiche de réservation parmi l'ensemble. On admet que toutes les fiches ont la même probabilité d'être choisies (on parle d'équiprobabilité).
   On note A l'événement "la réservation est pour une famille" et $\bar{A}$ l'événement contraire de A.
   On note B l'événement "la réservation est pour l'Europe" et $\bar{B}$ l'événement contraire de B.
   Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.
3. (a) Sachant que la fiche de réservation est pour une famille (parmi les fiches destinées aux familles), calculer la probabilité que la fiche de réservation destinée à l'Europe. On note $P_A(B)$ cette probabilité.
   (b) De la même manière, rédiger une phrase qui exprime les probabilités $P_A(\bar{B})$, $P_{\bar{A}}(B)$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B})$; puis les calculer.
   (c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



4. (a) Interpréter par une phrase l'événement $A \cap B$. Calculer sa probabilité $P(A \cap B)$.
   (b) Que pouvez-vous dire du produit $P(A) \times P_A(B)$?

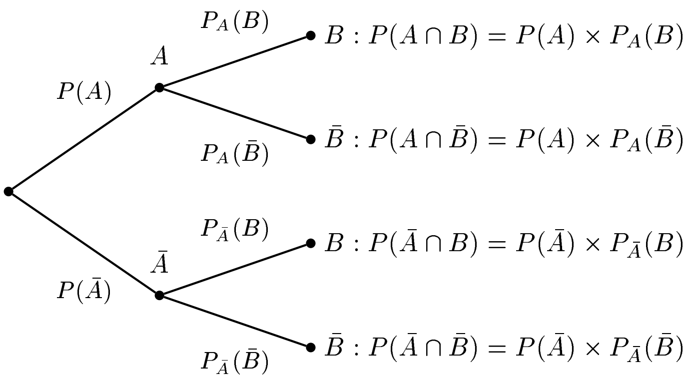
Définition :
Soit une probabilité définie sur un ensemble E. Soient A et B deux événements non vides de E. La probabilité conditionnelle de B sachant A (ou B parmi A), notée $P_A(B)$, est donnée par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1}$$

ce qui équivaut à :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \tag{2}$$

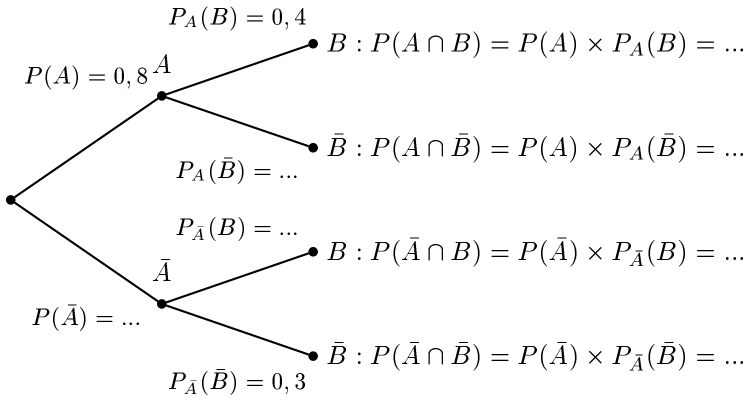
2 Lecture sur l'arbre pondéré



Propriété 1 :
La somme des probabilités à chaque noeud de l'arbre est 1 :
$P(A) + P(\bar{A}) = 1$
$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$
$P_{\bar{A}}(B) + P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1$

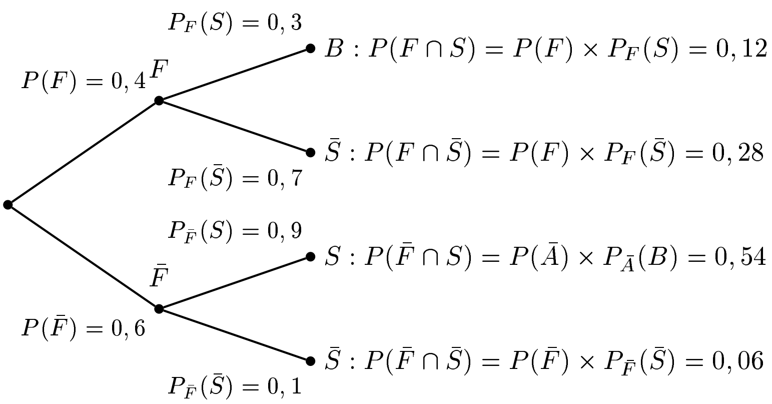
Propriété 2 :
La somme des probabilités des intersections au bout de l'arbre est 1 :
$P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1$

Exemple - exercice :
Compléter l'arbre de probabilité suivant et vérifier vos résultats des probabilités des intersections :



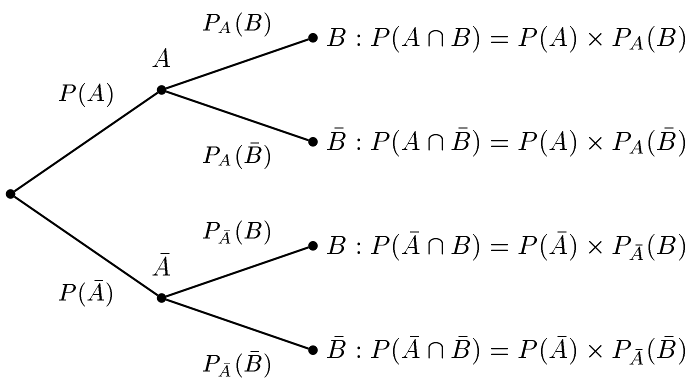
3 Formule des probabilités totales :

Activité :
Dans une classe, on s'intéresse aux personnes qui pratiquent un sport suivant le sexe :
On choisit au hasard une personne de la classe et on note :
F l'événement la personne est un fille et S l'événement la personne pratique un sport.



Calculer la probabilité de l'événement S.

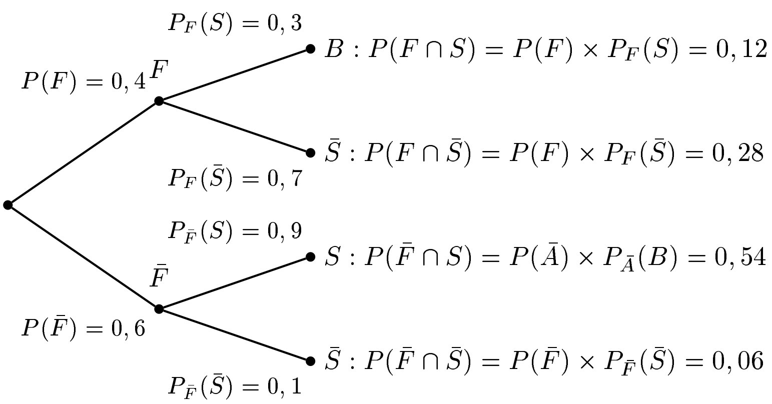
Soient une probabilité P sur un événement E et A et B deux événements non vides de E.
On considère l'arbre de probabilité suivant :



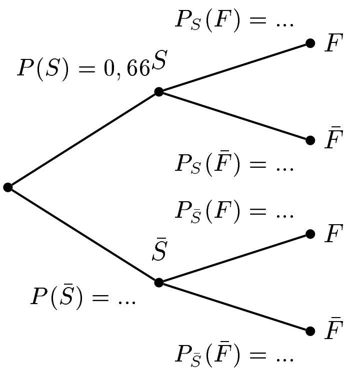
Théorème :
En remarquant que B est la réunion des événements disjoints (ou incompatibles) $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$, c'est à dire $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$, on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \tag{3}$$

Exercice :
En reprenant l'activité, avec $P(S) = 0,66$:



1. Calculer de deux manières $P(\bar{S})$.
2. En revenant à la définition des probabilités conditionnelles, calculer $P_S(F)$.
3. Recopier et compléter l'arbre pondéré contraire de probabilités :



4 Indépendances de deux événénements

Définition :
Soit une loi de probabilité sur une expérience aléatoire donnée. On note A et B deux événements non vides de l'expérience. On dit que les événements A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

On a alors $P_A(B) = P(B) et P_B(A) = P(A)$.

Exemples :
On lance un dé à 6 faces, numéroté de 1 à 6, puis on tire une boule dans une urne contenant une boule jaune et une boule verte.

1. Donner l'univers
2. On note les événements suivants :
   – A « obtenir un nombre pair »
   – B « obtenir une boule jaune »
   Vérifier que A et B sont indépendants et que $P(A \cap B) = 1/4$.