Calculs différentiels 1

1 Opérations sur les limites

1.1 Opérations de base

1.1.1 Multiplication par un réel

Théorème :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et u une fonction. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites du produit λu. l est un nombre réel.

$\lambda \backslash u$	$-\infty$	$+\infty$	l
$\lambda < 0$	$+\infty$	$-\infty$	λl
$\lambda > 0$	$-\infty$	$+\infty$	λl

Exemples :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3x^2\right)$:
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2\right) = +\infty$
   $-3 < 0$
   donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3x^2\right) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-3}{x}\right)$:
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$
   $-3 \times 0 = 0$
   donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-3}{x}\right) = 0$

1.1.2 Addition

Théorème :
Soit u et v deux fonctions. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites de la somme $u + v$. l et l' sont deux nombres réels, FI voulant dire *Forme Indéterminée*.

$v \backslash u$	$-\infty$	$+\infty$	l
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$
l'	$-\infty$	$+\infty$	$l + l'$

Exemples :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$:
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$
   donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - x\right)$:
   $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x\right) = +\infty$
   donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - x\right) = +\infty$

1.1.3 Multiplication

Théorème :
Soit u et v deux fonctions. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites du produit uv. l et l' sont deux nombres réels, FI voulant dire *Forme Indéterminée*.

$v\backslash u$	$-\infty$	$+\infty$	$l<0$	$l>0$	$l=0$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI
$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	ll'	ll'	0
$l'>0$	$-\infty$	$+\infty$	ll'	ll'	0
$l'=0$	FI	FI	0	0	0

Exemples :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\times\sqrt{x}\right)$:
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=+\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\right)=+\infty$
   donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\times\sqrt{x}\right)=+\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(e^x\times\ln(x)\right)$:
   $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(e^x\right)=1$
   $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\ln x\right)=-\infty$
   donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(e^x\times\ln x\right)=-\infty$

1.1.4 division

Théorème :
Soit u et v deux fonctions. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites du quotient $\frac{u}{v}$. l et l' sont deux nombres réels, FI voulant dire *Forme Indéterminée*.

$v\backslash u$	$-\infty$	$+\infty$	$l<0$	$l>0$	$l=0^-$	$l=0^+$
$-\infty$	FI	FI	0^+	0^-	0^+	0^-
$+\infty$	FI	FI	0^-	0^+	0^-	0^+
$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	0^+	0^-
$l'>0$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	0^-	0^+
$l'=0^-$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI
$l'=0^+$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Exemples :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$:
   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x^2\right)=1$
   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x-1\right)=0^+$
   donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)=+\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{e^x}{\ln x}\right)$:
   $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(e^x\right)=1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (\ln x) = -\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{e^x}{lnx}\right) = 0$

1.1.5 Les formes indéterminées

Exemples :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - x\right)$:
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$
   on ne peut pas conclure directement. Une technique de calcul doit permettre de lever l'indétermination, ici une factorisation : pour x assez grand (en particulier x non nul) on a
   $x^2 - x = x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}\right) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$
   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - x\right) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - x^2\right)$:
   $\lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$
   en factorisant on a
   $x - x^2 = x^2 \left(\frac{x}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}\right) = x^2 \left(\frac{1}{x} - 1\right)$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -1$
   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - x^2\right) = -\infty$

   On remarque que pour une même opération de limite $(+\infty + -\infty)$ on a un résultat différent, c'est pourquoi on parle de forme indéterminée.

   Aussi, le calcul formel d'une calculatrice ou d'un logiciel pourra vous donner le résultat d'une limite trop complexe, ce qui permet d'éviter les calculs trop techniques.

1.2 Composée de fonctions

Théorème :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur l'image de l'intervalle I par la fonction f, $f(I)$. Soit a, b, c des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$. Si :
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$
$\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$
Alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$

Exemple :

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (\ln(x-1))$:
   $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x-1) = 0^+$
   $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (\ln x) = +\infty$
   donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (\ln(x-1)) = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$:
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0^+$
   $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(e^x)=1$
   donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=1$

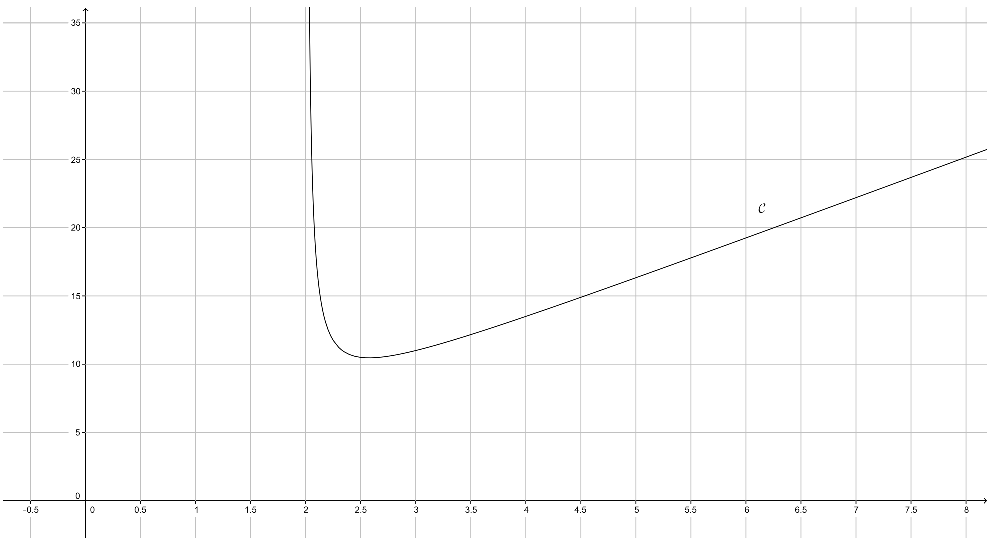
1.3 Asymptotes

Définition :
Soit une application f, on appelle $\mathcal{C}$ son graphe dans un repère orthogonal.
– La droite $\mathcal{D}$, d'équation $y=mx+p$, est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$, si :
$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+p))=0$
– La droite $\mathcal{D}$, d'équation $y=mx+p$, est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$, si :
$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+p))=0$
– La droite $\mathcal{D}$, d'équation $x=k$, est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en k, si :
$\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x\neq k}}f(x)=\pm\infty$

Exercice-exemple :
Soit la fonction f représentée par la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère ci-dessous :

$$f:\quad \begin{array}{lcl}]1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)=3x+1+\frac{1}{x-2}\end{array}$$

1. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=3x+1$ est asymptote (oblique) à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f. Tracer cette droite.
2. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x=2$ est asymptote (vertical) à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f. Tracer cette droite.



2 Opération sur les fonctions dérivées

2.1 fonctions dérivées

Théorème :
Soit une fonction f définie sur un intervalle I et x_0 un nombre de I.
On dit que f est dérivable en x_0 si la limite du quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en x_0 est finie, on notera cette limite $f'(x_0)$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

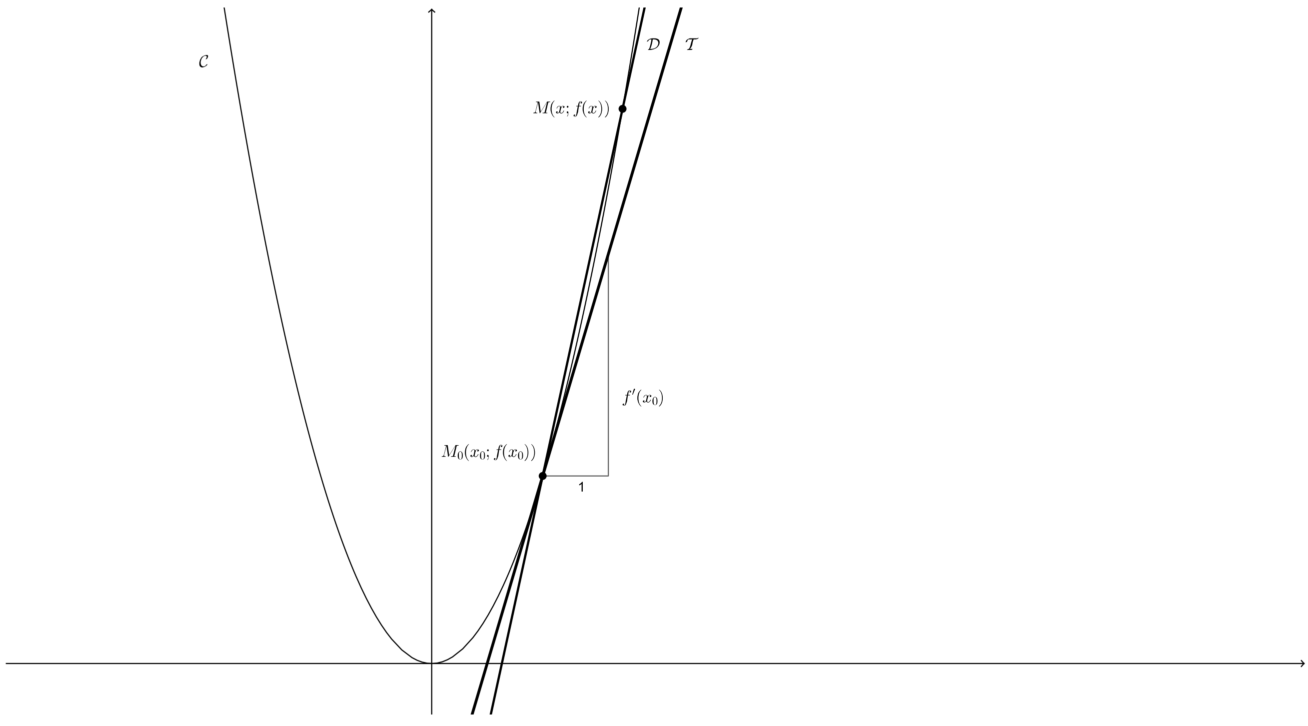
Définition :
Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point x_0 de I.
On note f' sa fonction dérivée.

Pour les fonctions de dérivées de référence, vous référez au chapitre des fonctions de référence.

2.2 Interprétation graphique : tangente

Soit une fonction f définie sur un intervalle I, sa représentation dans un repère orthogonal est $\mathcal{C}$; x_0 un nombre de I, $M_0(x_0; f(x_0))$ un point de $\mathcal{C}$. On suppose que f est dérivable en x_0.
pour tout nombre x distinct de x_0, on note le point $M(x; f(x))$ sur la courbe $\mathcal{C}$. La droite (MM_0) a pour coefficient directeur $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x0}$. Ainsi le nombre $f'(x_0)$ apparaît être la limite de la pente de la droite (MM_0) lorsque le point M est assez proche du point M_0.

Définition :
La droite $\mathcal{T}$ de pente $f'(x_0)$ comme la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en M_0.



Théorème :
Soit une fonction f définie sur un intervalle I, sa représentation dans un repère orthogonal est $\mathcal{C}$; x_0 un nombre de I, $M_0(x_0; f(x_0))$ un point de $\mathcal{C}$. On suppose que f est dérivable en x_0.
L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ en x_0 à la courbe $\mathcal{C}$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Exercice :
Démontrer la formule de l'équation d'une tangente.

2.3 Application aux variations

Théorème :
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, on note f' sa fonction dérivée.
- $(\forall x \in I, f'(x) < 0) \Leftrightarrow (f$ strictement décroissante sur $I)$.
- $(\forall x \in I, f'(x) > 0) \Leftrightarrow (f$ strictement croissante sur $I)$.
- $(\forall x \in I, f'(x) = 0) \Leftrightarrow (f$ constante sur $I)$.

Théorème :
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I =]a; b[$, on note f' sa fonction dérivée.
Soit $x_0 \in I$,
- $f(x_0)$ est un maximum sur I si et seulement si $(f'(x_0) = 0) \wedge (\forall x < x_0; f'(x) > 0) \wedge (\forall x > x_0; f'(x) < 0)$.
- $f(x_0)$ est un minimum sur I si et seulement si $(f'(x_0) = 0) \wedge (\forall x < x_0; f'(x) < 0) \wedge (\forall x > x_0; f'(x) > 0)$.

2.4 Opérations de base

Théorème :
Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}^*$. Les fonctions ku, $u + v$, uv, $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont respectivement dérivables sur I suivant les formules du tableau suivant :

f	f'
ku	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{u'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice-exemple :

1. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$:

$$\begin{array}{rll} f: &]0; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto f(x) = x + \ln(x) \end{array}$$

   Étudier les variations et les limites de la fonction f.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rll} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto g(x) = xe^x \end{array}$$

   Étudier les variations et les limites de la fonction g.

2.5 Composée de fonction

Théorème :
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et g une fonction définie et dérivable sur l'image de l'intervalle I par la fonction f, $f(I)$, on note respectivement f' et g' leur fonction dérivée.
La fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Exercice-exemple :
Soit l'application h définie sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & h(x) = e^{2x^2-x-1} \end{array}$$

Étudier les variations et les limites de la fonction h.

Corolaire :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, $n \in \mathbb{R}$ les fonctions composée e^u, $\ln(u)$ et u^n sont dérivables sur I (en s'assurant que du domaine de validité), et on a :
$(e^u)' = u'e^u$;
$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$;
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$