Les suites (première partie)

1 Raisonnement par récurrence

Activité - exemple :

Pour un entier n non nul, soit la proposition $\mathcal{P}(n)$: $1+2+3+...+n-1+n = n\times\dfrac{n+1}{2}$. (somme des termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1)
Le raisonnement par récurrence se fait en trois étapes :

1. **Initialisation** de la proposition $\mathcal{P}$:
   Vérifier que la proposition $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
2. **Hérédité** de la proposition $\mathcal{P}$:
   Vérifier que la proposition $\mathcal{P}(n)$ implique la proposition $\mathcal{P}(n+1)$.
3. **Conclusion** :
   - $\mathcal{P}(1)$ est vraie
   - $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$

   Que dire de $\mathcal{P}(2)$? Justifier.
   Plus généralement, que peut-on dire de $\mathcal{P}(n)$, pour tout entier n non nul ?

Propriété, raisonnement par récurrence :
Pour un entier n, soit une proposition $\mathcal{P}(n)$.
Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (**initialisation**) et si $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$ (**hérédité**) alors pour tout entier naturel n, $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemples - exercice : toutes les questions sont indépendantes.

1. pour un entier n, démontrer par récurrence que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel :
   (a) $\mathcal{P}(n)$: $q^0+q^1+q^3+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. (somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison le nombre réel q différent de 1)
   (b) $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   (c) $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$: la somme des cubes des n premiers entiers naturels est égale au carré de la somme des n premier entiers naturels.
2. Soit la suite u définie par le premier terme $u_1 = 7$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 10u_n - 18$. Quelle conjecture $\mathcal{P}(n)$ sur le terme u_n pouvez-vous émettre ? Démontrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Attention aux vérifications de l'initialisation et de l'hérédité :

1. **Nécessité de l'initialisation** :
   Exercice :
   $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: 9 divise $10^n + 1$.
   (a) Montrer que la proposition $\mathcal{P}$ est héréditaire : si on suppose $\mathcal{P}(n)$ alors on a $\mathcal{P}(n+1)$.
   (b) Existe-t-il un entier n_0 pour lequel la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ?
2. **Nécessité de l'hérédité** :
   Exercice :
   Soit la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1000$ et $u_{n+1} = u_n + E\left(\dfrac{u_n}{1000}\right)$, où $E(a)$ signifie la partie entière du nombre réel a (exemples : $E(1258,89) = 1258$, $E(2,023) = 2$).
   Pour n entier naturel, $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 1000 + n$.
   (a) Montrer que l'égalité est vraie pour les premiers entiers naturels.
   (b) Montrer que la proposition $\mathcal{P}$ n'est pas héréditaire (à partir de quel rang n la proposition $\mathcal{P}$ est fausse ?).

Exercice :
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit la proposition $\mathcal{P}(n)$: $2^n \geqslant n + 2$.

1. Est-ce que $\mathcal{P}$ est héréditaire ?
2. Est-ce que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie pour tout entier naturel n ? Pour quels entiers n la proposition $\mathcal{P}$ est vraie ?

2 Limite d'une suite

2.1 Limite finie d'une suite : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = L$

Activité :
Soit la suite u définie par $u_n = 0,5^n + 1$.

1. Quelle semble être la limite de la suite u (soit que dire de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$) ?

2. Quel est le dernier nombre N calculé par l'algorithme ?

Algorithm 1 Limite en l'infinie

$\epsilon \leftarrow 0,01$
$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 0,5^N + 1$
tantque $|U - 1| > \epsilon$ **faire**
  $N \leftarrow N + 1$
  $U \leftarrow 0,5^N + 1$
fin tantque

3. Montrer que pour tout $n > N$, $|u_n - 1| < \epsilon$ soit $0,99 < u_n < 1,01$ (soit $1 - \epsilon < u_n < 1 + \epsilon$).
   figure

Définition :
Soit une suite u définie sur $\mathbb{N}$.
Pour tout nombre ϵ de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$, s'il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, $|u_n - L| < \epsilon$ ($L \in \mathbb{R}$), alors on dit que la limite de u_n (quand n tend vers $+\infty$) est L et on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L$$

On dit aussi que la suite u converge vers L. Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Propriété :
Si une suite a pour limite L alors cette limite est unique.

Démonstration :

2.2 Limite infinie d'une suite : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$

Activité :
Soit la suite u définie par $u_n = 3^n - 10$

1. Quelle semble être la limite de la suite u (soit que dire de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$) ?

2. Après avoir complété l'algorithme, donner le dernier entier N calculé par l'algorithme ?

Algorithm 2 Limite en l'infinie

$A \leftarrow 100$
$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 3^N - 10$
tantque .... **faire**
  $N \leftarrow$ ....
  $U \leftarrow$ ....
fin tantque

3. Montrer que pour tout $n > N$, $u_n > 100$ ($A = 100$).
   figure

Définition :
Soit une suite u définie sur $\mathbb{N}$.

- Pour tout nombre A de$\mathbb{R}_+$, s'il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, $u_n > A$, alors on dit que la limite de u_n (quand n tend vers $+\infty$) est $+\infty$ et on écrit :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$
On dit aussi que la suite u diverge vers $+\infty$.
- Pour tout nombre A de$\mathbb{R}_-$, s'il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, $u_n < A$, alors on dit que la limite de u_n (quand n tend vers $+\infty$) est $-\infty$ et on écrit :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$
On dit aussi que la suite u diverge vers $-\infty$.

2.3 Opérations sur les limites

2.3.1 Multiplication par un réel

Théorème :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et u une suite. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites du produit λu. l est un nombre réel.

$\lim u_n$	$-\infty$	$+\infty$	l
$\lambda < 0$: $\lim \lambda \times u_n$	$+\infty$	$-\infty$	λl
$\lambda > 0$: $\lim \lambda \times u_n$	$-\infty$	$+\infty$	λl

Exemples - exercice :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-3n^2\right)$:
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2\right) = +\infty$
$-3 < 0$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-3n^2\right) = -\infty$
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-3}{n}\right)$,

2.3.2 Addition

Théorème :
Soit u et v deux suites. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites de la somme $u + v$. l et l' sont deux nombres réels, FI voulant dire *Forme Indéterminée*.

$\lim u_n$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	l	$+\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	l'	l	l
$\lim u_n + v_n$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$

Exemples - exercice :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 + \dfrac{1}{n}\right)$:
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2\right) = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 + \dfrac{1}{n}\right) = +\infty$
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-n^2 - n\right)$,
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-2}{n} - 5n\right)$.

2.3.3 Multiplication

Théorème :
Soit u et v deux suites. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites du produit uv. l et l' sont deux nombres réels, FI voulant dire *Forme Indéterminée.*

$\lim u_n$	$\pm\infty$	l	$l \neq 0$	0
$\lim v_n$	$\pm\infty$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim u_n \times v_n$	$\pm\infty$	$l \times l'$	$\pm\infty$	FI

Exemples :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 \times \sqrt{n}\right)$:
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n}) = +\infty$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 \times \sqrt{n}\right) = +\infty$

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(2n - \dfrac{1}{n}\right)$.

2.3.4 Inverse

Théorème :
Soit v une suite. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites de l'inverse $\dfrac{1}{v}$. l est un nombre réel.

$\lim v_n$	$\pm\infty$	$l \neq 0$	0^-	0^+
$\lim \dfrac{1}{v_n}$	0	$\dfrac{1}{l}$	$-\infty$	$+\infty$

Exemples :

1. Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{-2n+3}$. Pour étudier la limite en $-\infty$:
   $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n+3 = -\infty$ par les résultats des limites de quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{-2n+3} = 0$ (0^- : 0 par valeur inférieure).

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

2.3.5 division

Théorème :
Soit u et v deux suites. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites du quotient $\frac{u}{v}$. l et l' sont deux nombres réels, FI voulant dire *Forme Indéterminée.*

$\lim u_n$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	l	l	$l \neq 0$	0
$\lim v_n$	$\pm\infty$	l'	$\pm\infty$	$l' \neq 0$	0	0
$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$	FI	$\pm\infty$	0	$\dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	FI

Exemples :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2}{\dfrac{1}{n} - 1}\right)$:
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - 1\right) = -1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2}{\dfrac{1}{n}-1}\right)=-\infty$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+2}{\dfrac{-3}{n}-1}$.

2.3.6 Les formes indéterminées

Exemples :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-n\right)$:
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\right)=+\infty$
   $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n)=-\infty$
   on ne peut pas conclure directement. Une technique de calcul doit permettre de lever l'indétermination, ici une factorisation : pour n assez grand (en particulier n non nul) on a
   $n^2-n=n^2\left(\dfrac{n^2}{n^2}-\dfrac{n}{n^2}\right)=n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\right)=+\infty$
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=1$
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-n\right)=+\infty$

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-n^2\right)$. On remarque que pour une même opération de limite $(+\infty+-\infty)$ on a un résultat différent, c'est pourquoi on parle de forme indéterminée.

   Aussi, le calcul formel d'une calculatrice ou d'un logiciel pourra vous donner le résultat d'une limite trop complexe, ce qui permet d'éviter les calculs trop techniques.