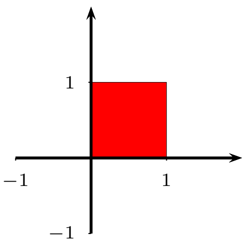
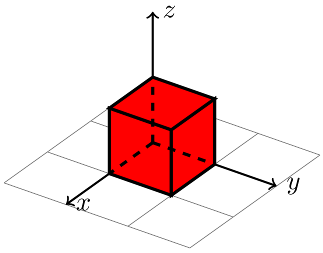
Primitives et intégrales

Note :
Dans tout ce cours, les aires sont exprimées en unité d'aire (u.a : aire du rectangle de côté 1×1 dans un repère orthogonal) et les volumes sont exprimés en unité de volume (u.v : volume d'un parallélépipède de côté $1 \times 1 \times 1$ dans un repère orthogonal) :



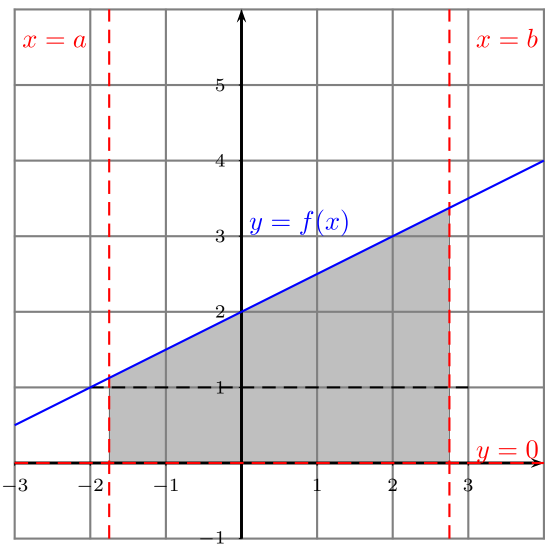


1 Primitives

1.1 Introduction

Activité :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0.5x + 2$. Soit a et b deux nombres réels, on souhaite exprimer en fonction de a et b ($a < b$) l'aire délimitée par les droites $x = a$ et $x = b$, la droite $y = 0$ et la courbe de la fonction f :

- $a \leqslant x \leqslant b$
- $0 \leqslant y \leqslant f(x)$



1. La figure grisée est un trapèze $\left(\mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \dfrac{\text{hauteur(grande base + petite base)}}{2}\right)$, montrer que son aire vaut $\dfrac{1}{4}b^2 + 2b - \left(\dfrac{1}{4}a^2 + 2a\right)$ que l'on peut noter $\left[\dfrac{1}{4}x^2 + 2x\right]_a^b$.
   On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 2x$.
2. Montrer que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1.2 Définition

Définition :
Soit une fonction F définie et dérivable sur un intervalle I. On dit que F est une primitive d'une fonction f sur I si on a $F' = f$.

Exemple-exercice :
Dans chaque cas, dire si la fonction F est une primitive de la fonction f :

1. $I = \mathbb{R}, F(x) = 3x^2 - 2x + 6$ et $f(x) = 6x - 2$
2. $I = \mathbb{R}, F(x) = 3x^2 - 2x$ et $f(x) = 6x - 2$
3. $I = \mathbb{R}, F(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ et $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Remarque :

- Une fonction f qui admet une primitive peut avoir plusieurs primitives distinctes.
- Pour trouver une primitive d'une fonction usuelle f il suffit de lire le tableau de dérivée de droite à gauche en prenant soin de vérifier les coefficients, aussi de connaître les opérations de dérivées, compléter le tableau de droite :

Fonction f	Fonction dérivée f'
k (k est un paramètre réel)	0
x	1
$mx + p$	m
x^n $(n \geqslant 1,\, n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x^n}$ $(n \geqslant 1,\, n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$

Une fonction primitive F de f	Fonction dérivée f
	0
	1
	m
	x^n
	$\dfrac{1}{x^n}$ $(n \geqslant 2)$
	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
	$\sin(x)$
	$\cos(x)$
	e^x
	$\dfrac{1}{x}$

Exemple-exercice :
Pour chaque fonction f déterminer une fonction primitive F, pour vérifier votre réponse dériver F.

1. x^4
2. $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$
3. $f(x) = 2x - 1$
4. $f(x) = x^2 - x + 1$

1.3 Les formes composées

De la même manière que pour les fonctions de référence, on détermine une primitive d'une fonction f par lecture contraire du tableau de dérivation des formes composées.
u est une fonction définie sur un intervalle I adéquat suivant la formule :

Fonction f	Fonction dérivée f'
u^n $(n \geqslant 1,\, n \in \mathbb{N})$	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u^n}$ $(n \geqslant 1,\, n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$

Une fonction primitive F de f	Fonction dérivée f
	$u'u^n$
	$\dfrac{-u'}{u^n}$ $(n \geqslant 2)$
	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$
	$u'\sin(u)$
	$u'\cos(u)$
	$u'e^u$
	$\dfrac{u'}{u}$

Exemples - exercices :
Déterminer une primitive F des fonctions f suivantes (l'intervalle de définition n'est pas à déterminer) :

1. $f(x) = (-x+1)^3$
2. $f(x) = 3(8x-5)^4$
3. $f(x) = \dfrac{2x}{sqrt3x^2+1}$
4. $f(x) = \dfrac{5}{(2x-7)^2}$
5. $f(x) = \cos(3x+1)$
6. $f(x) = xe^{x^2}$
7. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$
8. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$
9. $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{e^x}}$

Remarque :
Il n'est pas toujours évident de déterminer l'expression de fonctions primitives (lorsqu'elles existent), et pour certaines fonctions qui admettent des primitives, on ne connait pas leur expression, par exemple la fonction : $x \longmapsto e^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1.4 Propriétés

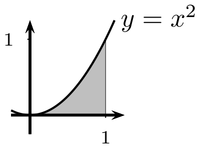
Théorème :
Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et F et G une primitive respective de ces fonctions. λ est un nombre réel.

- Une primitive de $f+g$ est $F+G$
- Une primitive de λf est λF

2 Intégrale et primitive

2.1 Introduction

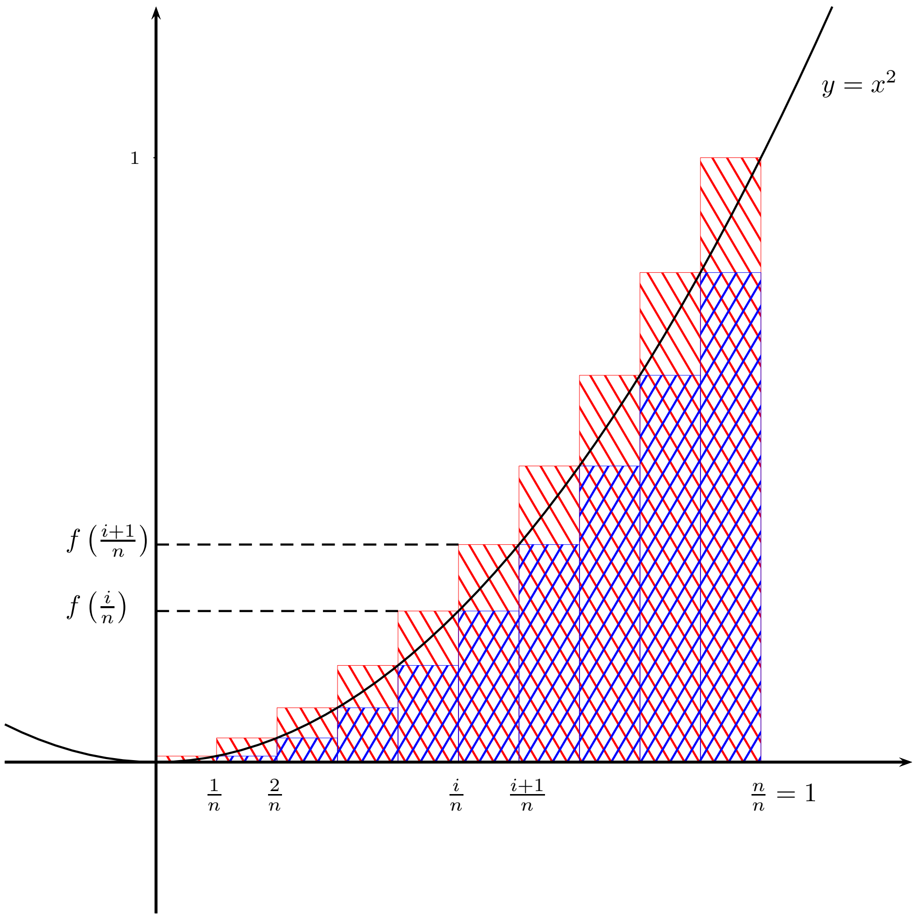
Activité :
Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = x^2$. Le but de l'activité est de déterminer l'aire définie par le domaine $\mathcal{D}$ suivant, on note $\mathcal{A}$ l'aire de ce domaine :
$\mathcal{D} = \{M(x\ ;\ y) \setminus 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x) = x^2\}$



On définit deux suites u_n et v_n par :

- $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$
  $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\left(\frac{0}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{n^2}\right) + ... + \left(\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\right)$
- $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{4}{n^2}\right) + ... + \left(\frac{n^2}{n^2}\right)\right)$

1. Le graphique suivant illustre les deux suites u et v, déterminer ce que représente chacune de ces suites :



2. Montrer que pour tout n entier naturel, $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
   Ainsi on a $u_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant v_n$.

3. On admet que $1 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrer que tout entier n,

   (a) $u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}$

   (b) $v_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}$

4. Montrer que les suites u et v sont adjacentes, c'est à dire :

   - u est croissante et v est décroissante
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

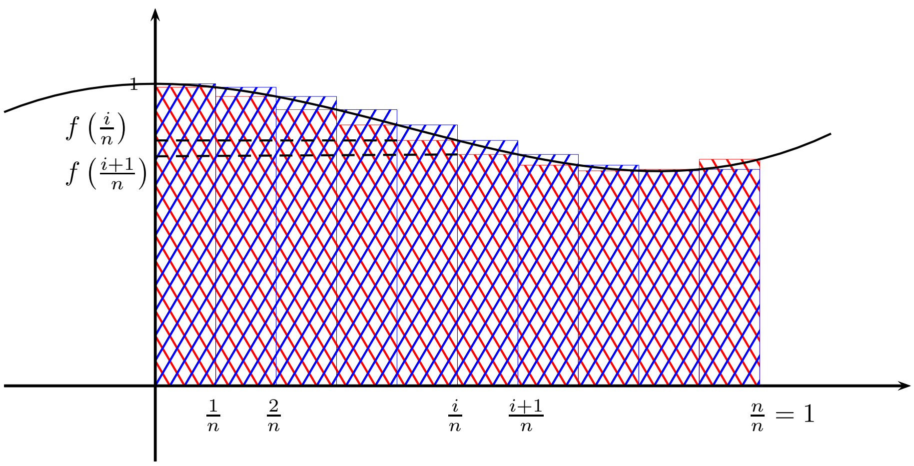
5. En déduire l'aire $\mathcal{A}$.
   On note $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$

2.2 Définition

Définition :
Soit f une fonction continue et positive définie sur un intervalle I. On appelle intégrale de a à b l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D} = \{x \in [a\ ;\ b]$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, on la note $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (se lit intégrale de a à b de $f(x)$.
On définit deux suites u et v :

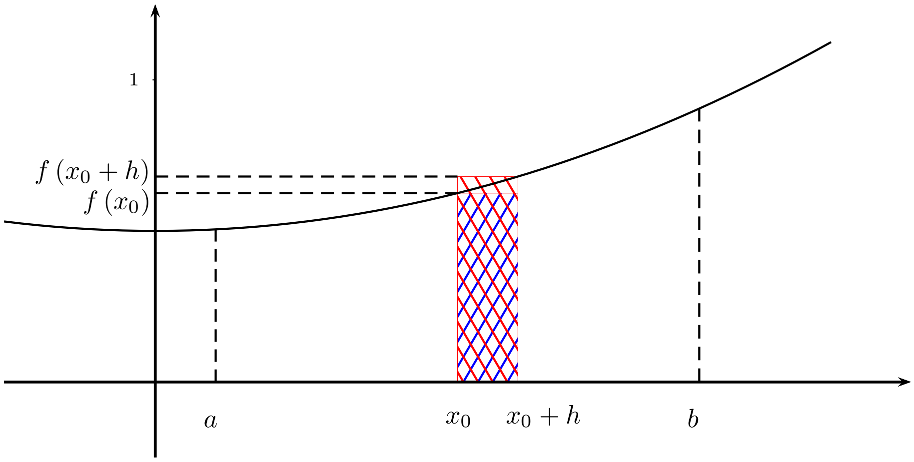
- $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$
- $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right)$

Ces deux suites convergent vers la même limite $\mathcal{A}$.
$f(x)\mathrm{d}x$ symbolise l'aire d'un rectangle de largeur très petite $\mathrm{d}x$ et de longueur $f(x)$ (voir activité) et le symbole $\displaystyle\int$ peut s'interpréter comme la somme des aires de ces petits rectangles.
Toute fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$ admet une aire $\mathcal{A}$ définie par le domaine
$\mathcal{D} = \{x \in [a\ ;\ b]$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.



Théorème :
Soit une fonction f continue et positive définie sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$.
La fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $F' = f$.
On admet que le théorème reste vrai pour toute fonction f continue sur $I = [a\ ;\ b]$.

Démonstration :
On admet que f est croissante sur I (le cas général est admis).
Soit $x_0 \in [a\ ;\ b]$, montrons que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$:



1. Soit $h > 0$, en interprétant des aires, simplifier $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{x_0} f(x)\mathrm{d}x$.

2. f est croissante ordonner $f(x_0)$, $f(x_0+h)$ et $f(t)$ pour $t \in [x_0\ ;\ x_0+h]$, et en interprétant les aires, ordonner $f(x_0) \times h$, $f(x_0+h) \times h$ et $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t$.

3. En déduire $f(x_0) \leqslant \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$.
   De la même manière on admet que si $h < 0$, on a $f(x_0+h) \leqslant \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$.

4. Déterminer $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$ et la dérivabilité de F en x_0.

Remarque :
$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$.
$F(a) = 0$.

2.3 Existence et unicité d'une primitive

2.3.1 Existence d'une primitive

Théorème : existence
Soit une fonction f définie et continue (ou continue par morceaux) sur un intervalle I, f admet une primitive sur I.

Démonstration :
f est une fonction continue sur $I = [a\ ;\ b]$ (la cas général de l'intervalle I est admis), elle admet un minimum m sur I. Soit la fonction g définie sur $I = [a\ ;\ b]$ par $g(x) = f(x) - m$.

1. Que dire de la continuité de la fonction g ? Quel est la signe de $g(x)$? En déduire une primitive G de g sur $[a\ ;\ b]$.

2. Soit la fonction F définie sur $[a\ ;\ b]$ par $F(x) = G(x) + mx$. Montrer que F est une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$.

2.3.2 Unicité d'une primitive

Théorème :
Soit une fonction f définie et continue (ou continue par morceaux) sur un intervalle I et on note F une primitive de f sur I.
Si G est une primitive de f sur I alors
$\forall x \in I, G(x) = F(x) + C$ où C est une constante réelle.

Démonstration :

1. Soit F est une primitive de f sur un intervalle I et la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + C$ (où C est une constante réelle), montrer que G est une primitive de f sur I.

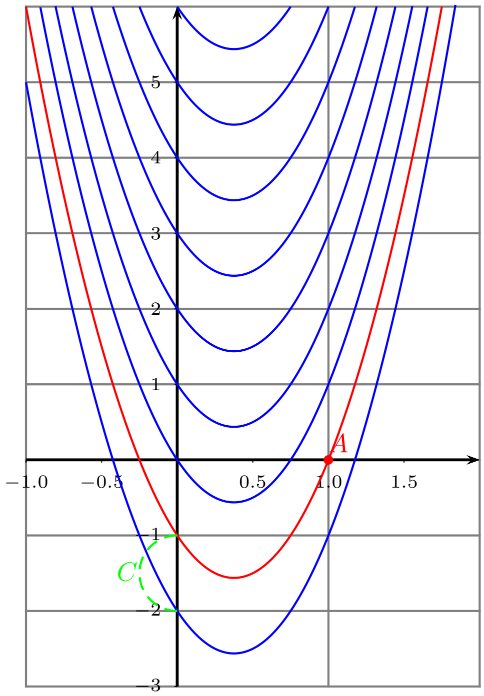
2. Étude de la réciproque : Soit F et G deux primitives de f sur I. Calculer $(F - G)'$, que peut-on dire de la fonction $F - G$?

Corollaire : condition initiale pour l'unicité d'une primitive
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et x_0 un nombre de I et y_0 un nombre réel.
Il existe une et une seule primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.
Le couple $(x_0; y_0)$ est appelé condition initiale.

Démonstration :
Soit G une primitive de f sur I.
Si G est une autre primitive de f alors il existe une constante réelle C telle que $F(x) = G(x) + C$.
Déterminer **la** valeur de C qui vérifie la condition initiale (la constante étant unique, la primitive F qui vérifie la condition initiale est unique).

Exemple-exercice :
Trouver la primitive de la fonction f de condition initiale $(1; 0)$, telle que $f(x) = 8x - 3$.

interprétation graphique :
Sur le graphique suivant, les courbes représentent des primitives de la fonction f de l'exemple, une seule passe par le point A de coordonnées $(1; 0)$.



3 Calcul intégrale

3.1 Calcul à partir d'une primitive

Théorème :
Soit une fonction f continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
$\forall a$ et $b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Démonstration :

1. Soit $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ une primitive de f sur I. Donner $G(a)$ et $G(b)$.
2. Soit F une autre primitive de f sur I, on a alors $\forall x \in I, F(x) = G(x) + C$ (C est une constante réelle). Calculer $F(a)$, en déduire $G(b)$ et $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple-exercice :
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^2 6t^2 - 4t + 1\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} e^x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^1 e^{3x-1}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$

3.2 Propriétés

Théorème : linéarité de l'intégrale
Soit deux fonctions f et g définies et continues sur l'intervalle $[a;b]$, λ un nombre réel non nul.

- $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Théorème : relation de Chasles
Soit deux fonctions f définies et continues sur l'intervalle $[a;b]$, c un nombre réel de $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration :
Exprimer les intégrales à partir d'une primitive F de la fonction f.

Théorème : positivité de l'intégrale
Soit une fonction f définies et continues sur l'intervalle $[a;b]$, telle que pour tout x de l'intervalle $[a;b]$, $f(x) \geqslant 0$. On a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Corollaire 1 : comparaison de deux intégrales
Soit deux fonctions f et g définies et continues sur l'intervalle $[a;b]$, telles que pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$. On a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration :
On compare $f(x) - g(x)$ à 0 et on utilise le théorème de positivité ainsi que la linéarité.

Corollaire 2 : inégalité de la moyenne

Si $\forall x \in [a\ ;\ b], m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.

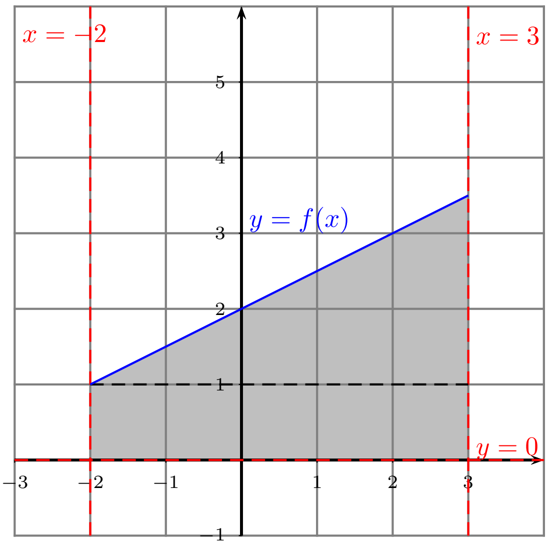
Démonstration :
Utiliser le corollaire précédent.

3.3 Moyenne

Définition :
Soit une fonction f continue définie sur l'intervalle $[a;b]$. On appelle valeur moyenne de $f(x)$ sur l'intervalle $[a;b]$ le nombre :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple-exercice :
Soit la fonction f définie sur $[-2;3]$ par $f(x) = 0,5x + 2$. Calculer la valeur moyenne de $f(x)$ sur l'intervalle $[-2;3]$ et interpréter graphiquement cette valeur.

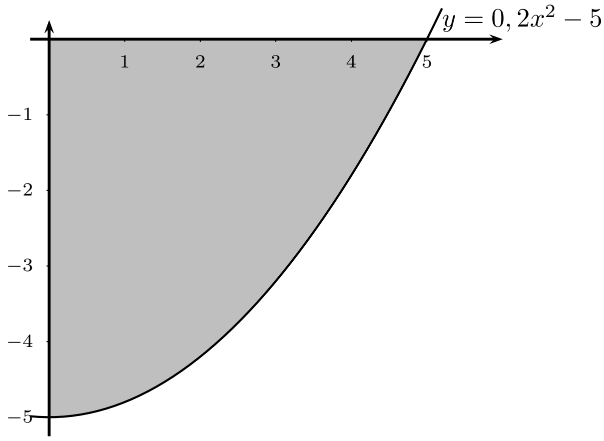


3.4 Aires et intégrales

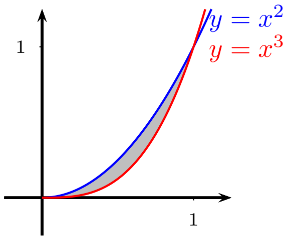
Propriétés :

1. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$.
   On a vu que l'aire $\mathcal{A}$ définie par le domaine $\mathcal{D} = \{M(x\ ;\ y) \setminus a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ est $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
   Exercice - exemple :
   Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D} = \{M(x\ ;\ y) \setminus 1 \leqslant x \leqslant 5 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x}\}$:

2. Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$.
   L'aire $\mathcal{A}$ définie par le domaine $\mathcal{D} = \{M(x\ ;\ y) \setminus a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$ est $-\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
   Exercice - exemple :
   Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D} = \{M(x\ ;\ y) \setminus 0 \leqslant x \leqslant 5 \text{ et } 0,2x^2 - 5 \leqslant y \leqslant 0\}$ (on admet que $\forall x \in [0\ ;\ 5], f(x) \leqslant 0)$:



3. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$ telles que $\forall x \in [a\ ;\ b], f(x) \leqslant g(x)$.
   L'aire $\mathcal{A}$ définie par le domaine $\mathcal{D} = \{M(x\ ;\ y) \setminus a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ est $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\mathrm{d}x$.
   Exercice - exemple :
   Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D} = \{M(x\ ;\ y) \setminus 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^3 \leqslant y \leqslant x^2\}$:



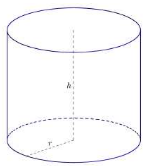
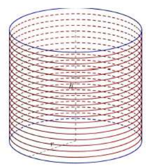
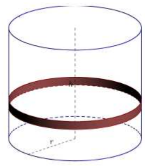
3.5 Volumes et intégrales

Le calcul du volume d'un solide de révolution est généré par la révolution autour de l'axe (Ox) d'une courbe d'équation $y = f(x)$ définie sur un intervalle fermé $[a\ ;\ b]$.
On montre que le volume V du solide est donné par

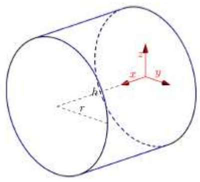
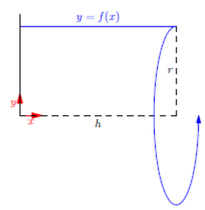
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Exemples et illustrations : Déterminer les volumes de chaque solide de révolution suivant :

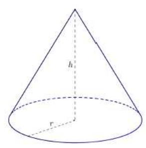
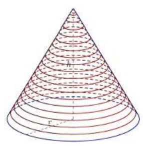
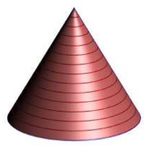
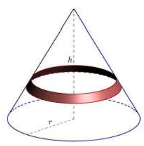
1. Le volume du cylindre
   Découpage du solide :

figure 1	figure 2	figure 3	figure 4
			

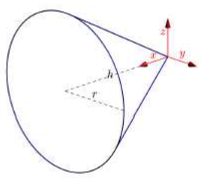
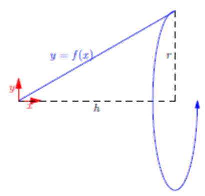
   Calcul du volume :

figure 5	figure 6 (pour le calcul)
	

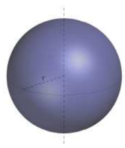
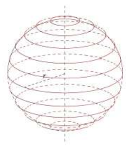
2. Le volume du cône :
   Découpage du solide :

figure 1	figure 2	figure 3	figure 4
			

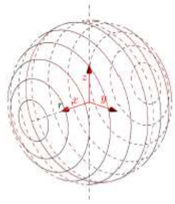
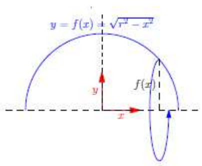
   Calcul du volume :

figure 5	figure 6 (pour le calcul)
	

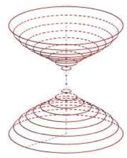
3. Le volume de la boule :
   Découpage du solide :

figure 1	figure 2
	

   Calcul du volume :

figure 3	figure 4 (pour le calcul)
	

4. Le volume du diabolo :
   Découpage du solide :

figure 1	figure 2
	

   Calcul du volume :

figure 3	figure 4 (pour le calcul)