Les nombres complexes

1 Définitions d'un nombre complexe

1.1 Forme algébrique

L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$. On pose i une solution de l'équation $x^2 = -1$ on a alors $i^2 = -1$.
L'autre solution de l'équation est $(-i)$. Si i a pu être noté $\sqrt{-1}$, cette notation n'est plus d'actualité.
Ainsi on a pu résoudre d'autres équations en conservant les règles de calculs habituelles sur $\mathbb{R}$.

Exercice - exemple :

1. Résoudre
   (a) $x^2 = -4$
   (b) $0,25x^2 + x\sqrt{2} + 3 = 0$
2. Toujours avec les opérations habituelles sur $\mathbb{R}$, on peut simplifier les calculs suivants :
   (a) $z_1 = 3 + 2i - (5 + 4i)$
   (b) $z_2 = (3 + 2i)(5 + 4i)$

Définition :
Le nombre z défini par l'expression unique $a + ib$ où $i^2 = -1$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est appelé nombre complexe, l'expression $a + ib$ est appelée forme algébrique du nombre complexe z. L'ensemble de ces nombres z forment l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

- a est appelé partie réelle du nombre complexe z : $a = \mathcal{R}e(z)$
- b est appelé partie réelle du nombre complexe z : $b = \mathcal{I}m(z)$

L'ensemble $\mathbb{C}$ prolonge les règles de calculs de $\mathbb{R}$ d'addition et de multiplication.

Remarques :

- $z = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0$ et $\mathcal{I}m(z) = 0$,
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0$. Ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$,

Définition :
Un nombre complexe z qui a pour forme algébrique ib où $b \in \mathbb{R}$ ($\mathcal{R}e(z) = 0$) est appelé imaginaire pur.

Propriété :
Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

$$z = z' \Longleftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b').$$

Autrement dit, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont égales.

Exercice - exemples :

1. $\mathcal{I}m(5 - 2i) =$
2. $\mathcal{R}e\left((2i - 1)(i + 7)\right) =$
3. Résoudre dans $\mathcal{C}$, $z - 3 + 2i = 5 + 7i$

1.2 Conjugué

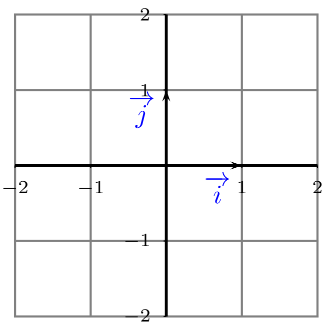
Définition :
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.
Le nombre complexe $\overline{z}$ d'expression algébrique $x - iy$ est appelé nombre conjugué de z.

Exemple :
Quel est le conjugué du nombre complexe $z = 3 - 2i$?

1.3 Représentation graphique

Définition :
Soit z un nombre complexe, $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
Le nombre complexe z est représenté dans un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ par un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
Tout point M du plan représente un unique nombre complexe z.
On dit que le point M a pour affixe z.
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z.
Le plan qui représente des nombres complexes est appelé plan complexe.

Exemple :
Dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$, représenter :



1. le point M_0 d'affixe $z_0 = i$
2. Le point M_1 d'affixe $z_1 = 1 + 2i$
3. Le point M_2 d'affixe $z_2 = -2 - i$
4. L'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe z tels que $\mathcal{I}m(z) = 0$
5. L'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe z tels que $\mathcal{R}e(z) = 0$
6. Pour un point M d'affixe z, placer les points d'affixes $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$
7. L'ensemble des points M tels que $\mathcal{I}m(z + 1 - 0,5i) = 0,5$

Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$:

Théorème :
Soit A et B deux points d'affixe z_A et z_B, le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Théorème - définition :
M un point d'affixe $z = x + iy$.
$OM^2 = x^2 + y^2$ soit $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.
On note alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $|z|$ est appelé module du nombre complexe z.

Remarque :
$|z| = 0 \Longleftrightarrow OM = 0 \Longleftrightarrow M = O \Longleftrightarrow z = 0$.

Théorème :
Soit A et B deux points d'affixe z_A et z_B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
$AB = |z_B - z_A|$.

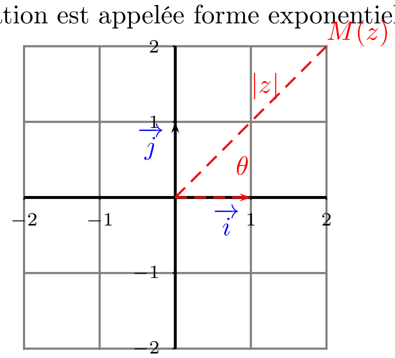
Théorème :
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectifs $z_{\overrightarrow{u}}$ et $z_{\overrightarrow{v}}$, k un nombre réel.

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ est $z_{\overrightarrow{u}}+z_{\overrightarrow{v}}$.
- L'affixe du vecteur $k\overrightarrow{u}$ est $k\times z_{\overrightarrow{u}}$.

1.4 Forme trigonométrique

Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$:
Définitions :
Soit M un point d'affixe $z=x+iy$.
Il existe un unique nombre θ de $]-\pi\ ;\ \pi]$ tel que $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)=\theta$ et $z=|z|\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$.

- θ est appelé argument du nombre complexe z, on note $\arg(z)=\theta$.
- L'écriture $|z|\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$ est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z.
- On note aussi $z=|z|e^{\theta}$, cette notation est appelée forme exponentielle du nombre complexe z.



Remarque :
Avec les notations précédentes, pour $z\neq 0$,

- $\mathcal{R}e(z)=x=|z|\cos(\theta)\iff\cos(\theta)=\dfrac{x}{|z|}=\dfrac{\mathcal{R}e(z)}{|z|}$
- $\mathcal{I}m(z)=x=|z|\sin(\theta)\iff\sin(\theta)=\dfrac{y}{|z|}=\dfrac{\mathcal{I}m(z)}{|z|}$

Exercice - exemple :
Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$, placer les points M d'affixe :

1. $2e^{\frac{\pi}{3}}$
2. $\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donner la forme exponentielle.

Exercice :

1. Donner les formes trigonométrique et exponentielle des nombres complexes suivants :
   (a) $z_1=\sqrt{3}-i$
   (b) $z_2=1+i$
   (c) $z_3=-2+2i\sqrt{3}$
2. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivant :
   (a) $z_4=3\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)\right)$.
   (b) $z_5=0,5e^{\frac{5\pi}{6}}$.

Exercice :
Soit z d'affixe $z=\rho e^{\theta}=\rho\left(\cos(\theta)+i\sin\left(\theta\right)\right)$.
Donner les écritures algébriques, trigonométriques et exponentielle de $-z$, $\overline{z}$, $-\overline{z}$.

2 Opérations de base

2.1 Opérations issues de $\mathbb{R}$

Propriétés :
Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.

- $z + z' = x + x' + i(y + y')$
- $zz' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$
- Pour z' non nul, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \dfrac{x' - iy'}{x'^2 + y'^2} = \dfrac{x'}{x'^2 + y'^2} + i\dfrac{-y'}{x'^2 + y'^2}$
- Pour $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \dfrac{xx' + yy' + i(x'y - xy'}{x'^2 + y'^2} = \dfrac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i\dfrac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}$

Démonstration : laissée en exercice.
Exercice - exemples :
Simplifier les calculs suivants :

1. $3 + i + \dfrac{1}{5 - 2i}$
2. $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)$
3. $\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
4. $z = x + iy$, simplifier :
   (a) z^2,
   (b) $\overline{z}^2$,
   (c) $\overline{z^2}$,
   (d) $\dfrac{1}{z^2}$.

Propriété du produit nul :
Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.

$$zz' = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z' = 0$$

Démonstration :
Si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors $zz' = 0$. Réciproquement :
$zz' = 0 \iff xx' - yy' = 0$ et $xy' + y'x = 0 \iff xx' = yy'$ et $xy' = -x'y$.
Si $x = 0$ ou $x' = 0$ ou $y = 0$ ou $y' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$.
Si aucun n'est nul, $xx'yy' = y^2y'^2 = -x'^2y^2$ soit $y'^2 = -x'^2$ soit $x' = y' = 0$. On aboutit a une contradiction.
Nécessairement $z = 0$ ou $z' = 0$.

Propriétés du conjugué :
Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes et $\overline{z}$ et $\overline{z'}$ leur conjugué.

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z\overline{z} = x^2 + y^2$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
- Pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
- Pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$

- Pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Démonstration : laissée en exercice.
Il n'y a pas de relation d'ordre avec les nombres complexes qui ne sont pas des nombres réels.

3 Équation du second degré

Théorème :
Soit $\mathcal{E} : ax^2 + bx + c = 0$ avec a dans $\mathbb{R}^*$, b et c dans $\mathbb{R}$ une équation du second degré et Δ son discriminant.
Si $\Delta < 0$ alors $\mathcal{E}$ n'a pas de solution réelle, mais deux solutions complexes z_1 et z_2 :

- $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
- $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Démonstration :
Si $\Delta < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x - \dfrac{b}{2a}\right)^2 - i^2\dfrac{-\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x - \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$,
$a\left(x - \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0$
$\iff x - \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0$ ou $x - \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0$
$\iff x = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $\dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exercice :
On admet que toute équation polynôme $\mathcal{E}$ ($a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0 = 0$ avec $a_n \in \mathbb{R}^*$ et $a_i \in \mathbb{R}$) à coefficients réels de degré n admet exactement n solutions complexes (certaines peuvent être multiples).
Soit l'équation d'inconnue z, $\mathcal{E} : z^3 = 1$.

1. Trouver la solution évidente z_1 de $\mathcal{E}$.
2. Montrer que $\mathcal{E}$ peut s'écrire sous la forme $(z - z_1)(z^2 + bz + c) = 0$.
3. En déduire toutes les solutions de $\mathcal{E}$.

Exercice : pour aller plus loin
On admet que toute fonction polynôme à coefficients complexes de degré n admet exactement n solutions (certaines peuvent être multiples).
Soit l'équation complexe d'inconnue z, $\mathcal{E} : iz^3 = 1$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ admet une solution évidente z_1.
2. Montrer que $\mathcal{E}$ est équivalente à $z^3 + i = 0$.
3. Montrer que le polynôme $z^3 + i$ se factorise par la forme $(z - z_1)\left(z^2 + bz + c\right)$, b et c sont des nombres complexes à déterminer.
4. En déduire les trois solutions de $\mathcal{E}$.

4 Forme trigonométrique

4.1 Opérations avec les formes trigonométriques

Propriétés :
Soit $z = \rho\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$ et $z' = \rho'\left(\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right)$.

- $zz' = \rho\rho'\left(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\right)$

- Pour $z' \neq 0$, $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{\rho'}\left(\cos(-\theta') + i\sin(-\theta')\right) = \dfrac{1}{\rho'}\left(\cos(\theta') - i\sin(\theta')\right)$
- Pour $z' \neq 0$, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'}\left(\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')\right)$
- Pour tout entier n, $z^n = \rho^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$.

Démonstration :

- zz' : écrire le produit des formes trigonométriques, développer puis simplifier avec les formules d'addition trigonométriques.
- $\dfrac{1}{z'}$: utiliser la forme conjuguée puis simplifier.
- $\dfrac{z}{z'}$: utiliser le produit $z\dfrac{1}{z'}$.
- z^n : utiliser le raisonnement par récurrence et les formules trigonométriques.

Corolaire :

1. $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$
2. $|zz'| = |z| \times |z'|$
3. Pour $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$
4. Pour $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
5. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
6. Pour $z' \neq 0$, $\arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = -\arg(z')$
7. Pour $z' \neq 0$, $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

4.2 Notation exponentielle

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$ telle que $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
Avec les propriétés des opérations sur les formes trigonométrique, on a $f(\theta)f(\theta') = f(\theta + \theta')$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$, $f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta) = if(\theta)$. Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y' - iy = 0$. On peut alors noter légitimement : $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$.
Il découle des opérations sur les formes trigonométriques des nombres complexes, une notation dite exponentielle :$\rho\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) = \rho e^{i\theta}$:
Soit $z = \rho e^{i\theta}$, $z' = \rho' e^{i\theta'}$

- $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta'}$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'} ei(\theta - \theta')$
- $z^n = \rho^n e^{in\theta}$

Théorème : formules d'Euler :

- $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos(\theta)$
- $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin(\theta)$

Démonstration :

- $\dfrac{e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)+\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)=\dfrac{1}{2}\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)+\cos(\theta)-i\sin(\theta)\right)=\cos(\theta)$.

- laissée en exercice.

Théorème : formules de Moivre :
$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$

Démonstration :
$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=e^{i\theta^n}=e^{in\theta}=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.
Figure :