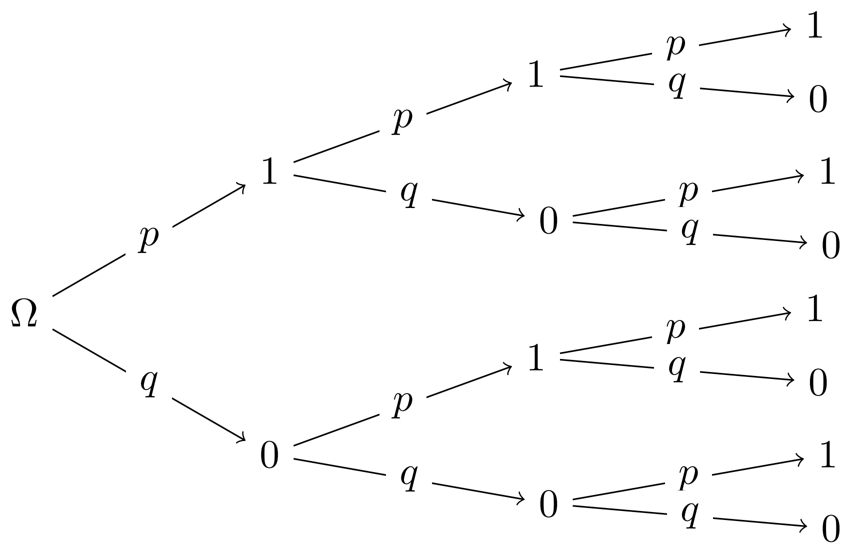
# Notions de loi à densité (suite), loi Normale.

## 1 Loi Binomiale (rappels)

On rappelle qu'une variable $X$ suit une loi Binomiale de paramètres $(n;p)$ si $X$ compte le nombre de "succès" dans une situation de $n$ expériences indépendantes et identiques à deux issues "succès" (noté 1) et "échec" (noté 0), avec la probabilité d'un succès sur chaque expérience égale à $p$.
Exemple avec une représentation pour $n = 3$.




En suivant les chemins, $X$ et les probabilités associées $P(X = k)$ prennent les valeurs dans ce tableau à compléter : On posera $q = 1 - p$.

| $X = k$ | $X = 0$ | $X = 1$ | $X = 2$ | $X = 3$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $q^3$ | $3pq^2$ | | |

Pour un grand nombre d'expériences, on utilisera la calculatrice graphique pour trouver les probabilités $P(x = k)$ ou $P(X \leqslant k)$.

**Théorème :**
Soit $X$ qui suit une loi Binomiale de paramètres $(n;p)$.

- L'espérance (moyenne) $E(X)$ est $E(X) = np$.
- L'écart-type, $\sigma(X)$ est $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

*Exercice - exemple :*
On lance trois fois de suite un dé non truqué de manière indépendante. On s'intéresse à l'événement "le nombre de fois que le numéro 6 apparait" et on note $X$ la variable qui compte le nombre de fois que 6 est apparu.

1. Donner la loi de probabilité de $X$. (On pourra utilisé l'arbre précédent)
2. Donner l'espérance de $X$ et son écart-type.
3. Retrouver les résultats à partir de la calculatrice.

*Exercice-exemple :*
Reprendre l'exercice précédent avec 5 expériences (on n'utilisera la calculatrice pour tout l'exercice).

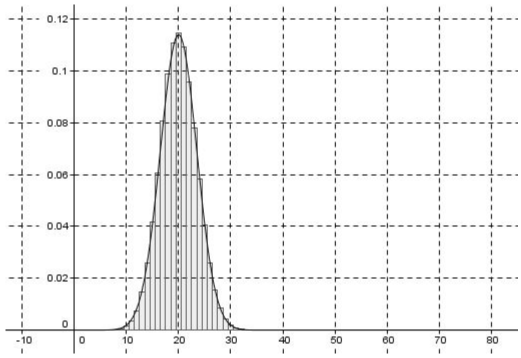
# 2 Loi Normale

## 2.1 Approximation de la loi Binomiale

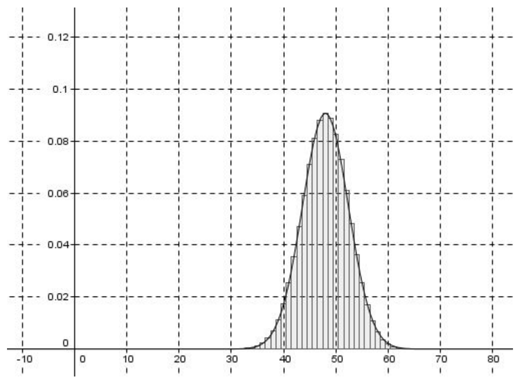
### 2.1.1 Activité

- ouvrir le document géogébra "convergence loi binomiale loi normale".
- constater que vous pouvez faire varier les paramètres $(n; p)$ de la loi binomiale, les caractéristiques de la loi Binomiale apparaissent en rose, notamment dans la partie tableur.
- régler les paramètres de telle manière que $X$ suive une loi binomiale de paramètres $(50; 0,4)$.
- Tout ce qui se réfère à la loi Normale est en bleu.

1. Introduction d'une loi Normale
   (a) Dans la partie tableur, quelle formule a été saisie en cellule B3 ?
   (b) Lire la probabilité $P(X = 20)$. Retrouver les résultats avec votre calculatrice.
   (c) Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ associés à la variable $X$.
   (d) Cocher la loi Normale de paramètres $(m'; s')$. Deux curseurs $m'$ et $s'$ apparaissent. Modifier les valeurs $m'$ et $s'$ de manière à obtenir une approximation de la loi Binomiale de paramètres $(n; p)$ par cette nouvelle courbe de la loi Normale de paramètres $(m', s')$, vous devez obtenir la configuration suivante :




   (e) Donner alors les valeurs de $m'$ et $s'$. Que constatez-vous ?
   (f) Retrouver les paramètres $(m'; s')$ de la loi Normale pour approcher une loi Binomiale de paramètres $(80; 0,6)$.




2. Loi centrée
   *Rappel :* $E(X)$ est l'espérance d'une variable $X$.
   $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $E(aX + b) = aE(X) + b$.

   $X$ suit une loi Binomiale de paramètres $(n \ ; \ p)$ et une variable $Y = X - np$.
   Montrer que $E(Y) = 0$.

3. Loi Réduite
   Rappel : $V(X)$ est la variance d'une variable $X$ et $\sigma(X)$ l'écart-type associé.
   $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX + b) = a^2V(X)$.

   $X$ suit une loi Binomiale de paramètres $(n \ ; \ p)$ et on pose $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}}$ avec $q = 1 - p$.

(a) Montrer que $E(Z)=0$

(b) Montrer que $\sigma(Z)=1$.

**Théorème de Moivre-Laplace (admis) :**
Soit la variable $X_n$ qui suit une loi Binomiale de paramètres $(n\ ;\ p)$.
Soit $Z_n$ la variable aléatoire définie par $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ avec $q=1-p$.

Pour tout nombre $a$ et $b$ réels, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(a\leqslant Z_n\leqslant b)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^b e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

*Démonstration : hors programme, cependant une démonstration (difficile) pour la cas ou $p=0,5$ pourrait être envisageable, ce cas a été démontré par Abraham Moivre (mathématicien français 1667-1754), Pierre Simon Laplace (mathématicien français 1749-1827) généralisa le cas où $p$ est dans $[0\ ;\ 1]$.*

### 2.1.2 Loi Normale centrée réduite

*Activité :*

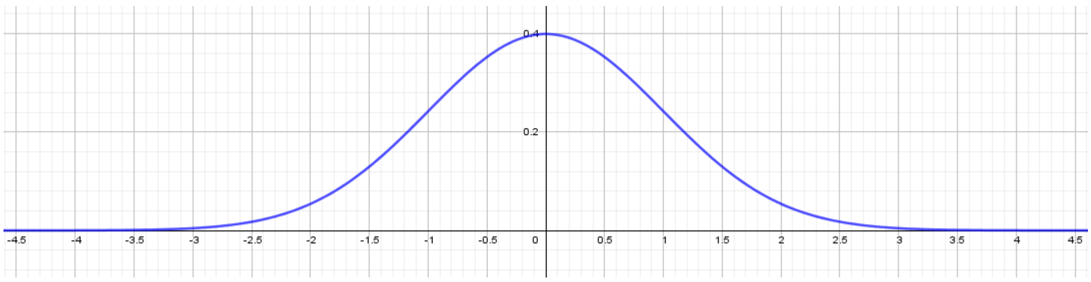
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Étude de la fonction $f$ :

   (a) Montrer que $f$ est paire.

   (b) Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$. Vous déterminerez les limites de $f(x)$ aux bornes de l'ensemble de définition.

   (c) On donne la représentation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ :




   On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x=0,5$. Justifier alors que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=0,5$

2. $f$ est une loi à densité :

   (a) Justifier que $f$ est continue et que $f(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$.

   (b) Justifier que la fonction $f$ une fonction à densité.

3. Espérance :
   Soit $X$ une variable aléatoire continue qui suit une loi de fonction de densité $f$. On rappelle que l'espérance d'une loi continue de fonction de densité $f$ est donnée $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.
   Montrer que $E(X)=0$.
   On admettra que l'écart-type $\sigma(X)$ vaut 1.

**définition :**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
On dit que la variable aléatoire continue $X$ suit une loi Normale centrée réduite si elle a pour fonction de densité la fonction $f$.
On note alors $X\sim\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$

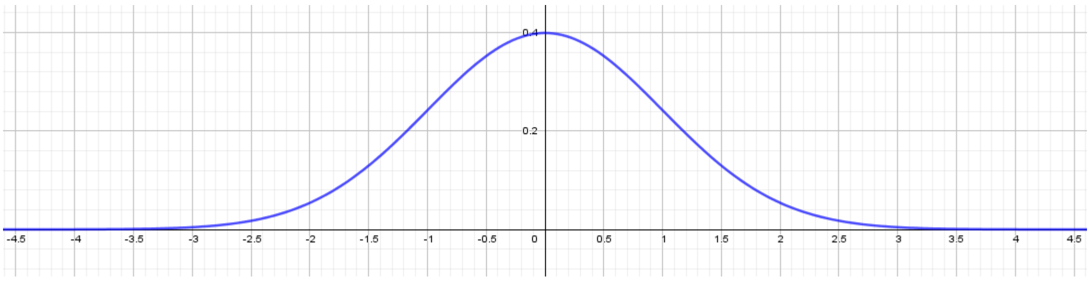
- $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$
- l'espérance est $E(X) = 0$
- l'écart-type est $\sigma(X) = 1$.

*Exemple- exercice :*
Soit une variable $X$ qui suit la loi Normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.
On donne les probabilités suivantes :

- $P(X \in [-1\ ;\ 1]) \simeq 0,68$
- $P(X \in [-1,96\ ;\ 1,96]) \simeq 0,95$

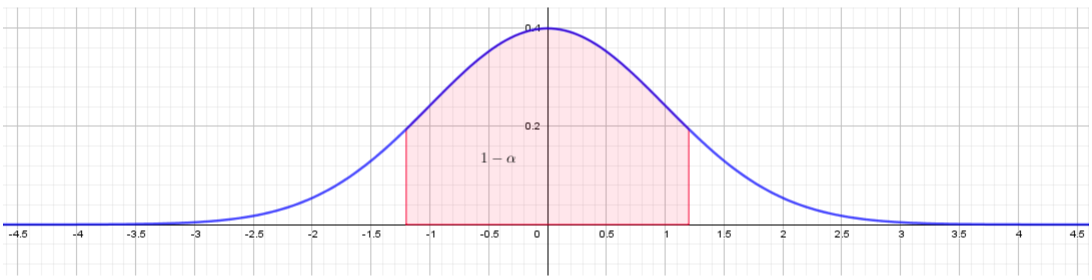
À partir des propriétés de la fonction $f$, déterminer :

1. (a) $P(X \in [0\ ;\ 1])$
   (b) $P(X > 1,96)$
   (c) $P(X \in [1\ ;\ 1,96])$



2. Vérifier les données de l'exercice et retrouver les résultats de la question 1 à l'aide de la calculatrice.

**Théorème :**
Soit la fonction de densité $f$ de la loi Normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.




Soit un réel $\alpha$ de $[0\ ;\ 1]$.
Il existe un unique réel $\theta_\alpha$ tel que $P(X \in [-\theta_\alpha\ ;\ \theta_\alpha]) = 1 - \alpha$.

*Démonstration :*
Soit la fonction $F$ définie pour tout réel $x$ par $F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.
On cherche à résoudre $F(x) = 1 - \alpha$.

1. Justifier que $F(x) = 2\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. On pose $G(x) = \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ pour $x \in [0\ ;\ +\infty[$.
2. Justifier que $G$ est continue.
3. Déterminer les variations de $F$.
4. Montrer que l'équation $G(x) = \dfrac{1-\alpha}{2}$ admet une unique solution (soit que l'équation $F(x) = 1 - \alpha$ admet une unique solution notée $\theta_\alpha$.
5. Déterminer $P(X \notin [-\theta_\alpha\ ;\ \theta_\alpha])$.

6. Déterminer $\theta$ pour
   - $\alpha = 0,32$
   - $\alpha = 0,05$
   - $\alpha = 0,01$.

**Propriété (intervalles de normalité) :**
Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi Normale $\mathcal{N}(0~;~1)$.

- $P(X \in [-0,99~;~0,99]) \simeq 0,68$
- $P(X \in [-1,96~;~1,96]) \simeq 0,95$
- $P(X \in [-2,58~;~2,58]) \simeq 0,99$

## 3 Loi Normale : cas général

**Définition :**
Une variable aléatoire $X$ suit une loi Normale de paramètre $(\mu~;~\sigma)$ si la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi Normale centrée réduite $\mathbb{N}(0~;~1)$.
On écrit alors $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu~;~\sigma)$.

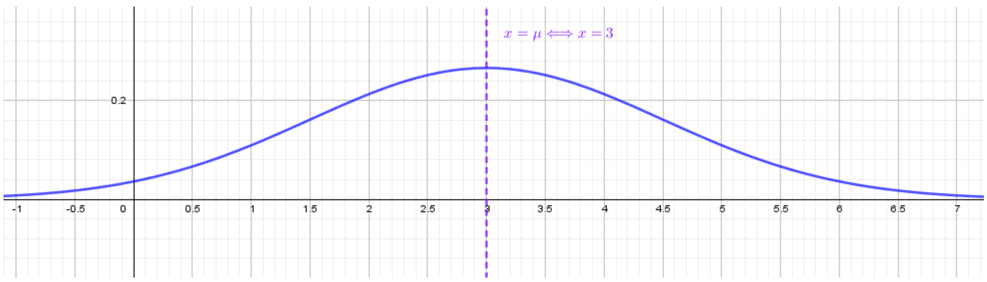
*Remarque :*

La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, où $\mu$ et $\sigma$ sont des nombres réels positifs est la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu~;~\sigma)$.

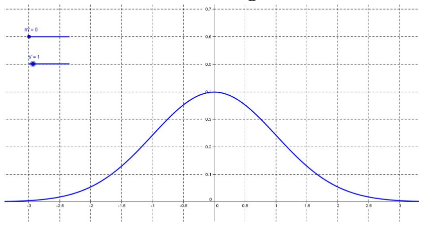
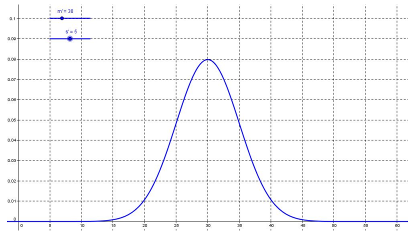
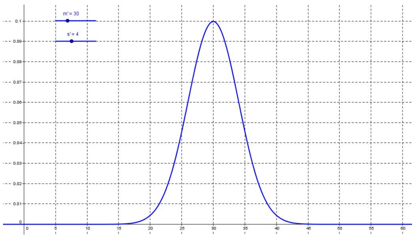
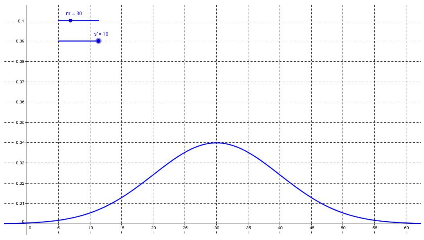
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$
- $F(x) = P(X < x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$
- l'espérance est $E(X) = \mu$
- l'écart-type est $\sigma(X) = \sigma$.

*Exemple :*

$f(x) = \dfrac{1}{1,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{1,5}\right)^2}$, où $\mu = 3$ et $\sigma = 1,5$



*Exemples de représentations graphiques de la fonction de densité $f$ :*

| paramètres de la loi Normale | Représentation graphique |
|---|---|
| $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ |  |
| $X \hookrightarrow \mathcal{N}(30;5)$ |  |
| $X \hookrightarrow \mathcal{N}(30;2)$ |  |
| $X \hookrightarrow \mathcal{N}(30;10)$ |  |

Une courbe en forme de "cloche", admettant un axe de symétrie d'équation $x = m$, avec de moins en moins de valeurs lorsqu'on s'éloigne de l'axe de symétrie, est représentative d'une loi dite Normale de paramètres $(\mu;\sigma)$ ou $\mu$ représente la moyenne et $\sigma$ l'écart-type associés à une variable $X$.

*Remarque :*
Plus l'écart-type est petit, plus les valeurs de la série sont concentrées autour de la moyenne, la courbe est plus "serrée". (voir les graphiques ci-dessus pour les cas, $n = 30$).

## 3.1 Propriété de la loi Normale

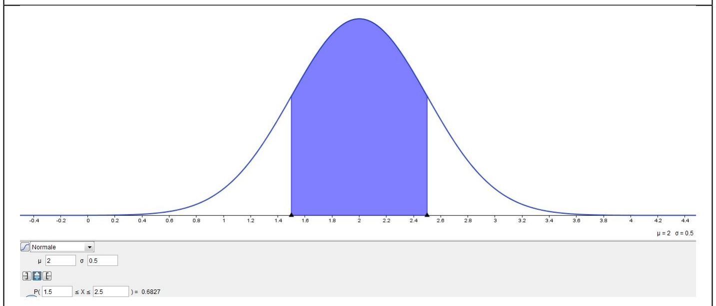
Théorème :
Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$.

- $P(X \in ]\mu - \sigma\ ;\ \mu + \sigma[) \simeq 0,68$
- $P(X \in ]\mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma[) \simeq 0,95$
- $P(X \in ]\mu - 3\sigma\ ;\ \mu + 3\sigma[) \simeq 0,997$

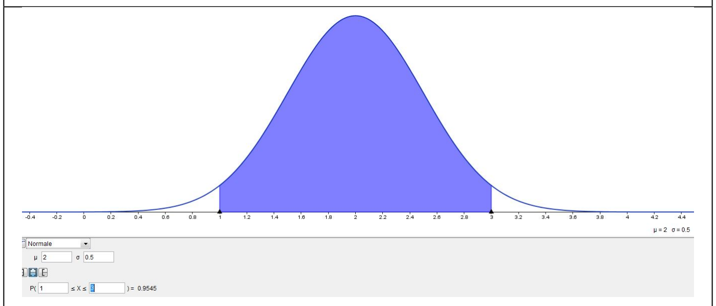
*Exemple :*
A partir de la calculatrice, vérifier les résultats annoncés pour $X \sim \mathcal{N}(2\ ;\ 0,5)$.

*Illustration :*

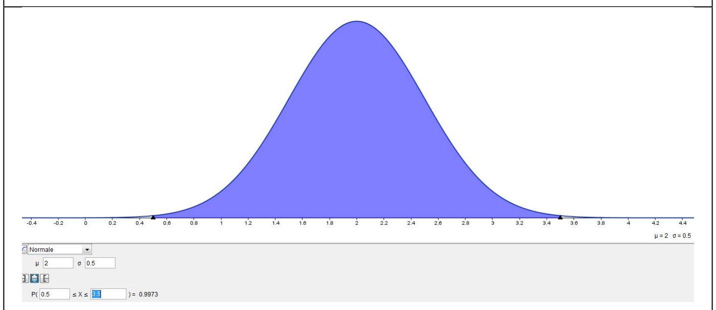
intervalle à 68%



intervalle à 95%



intervalle à 99%



*Exercice :*
Au magasin, un pot de fromage blanc pèse 1kg. On admet que la masse $X$ exprimée en gramme d'un pot de fromage blanc suit une loi Normale $\mathcal{N}(998\ ;\ 10)$.

1. Déterminer $P(X < 990)$.
2. Déterminer de deux manières $P(988 < X < 1008)$. Puis $P(978 < X < 1018)$.
3. Déterminer $a$ réel positif tel que $P(998 - a < X < 998 + a) > 0,97$. Interpréter le résultat par une phrase.