# Notions de loi à densité, loi uniforme, loi exponentielle.

## 1 Densité et probabilité

### 1.1 Définition de la densité

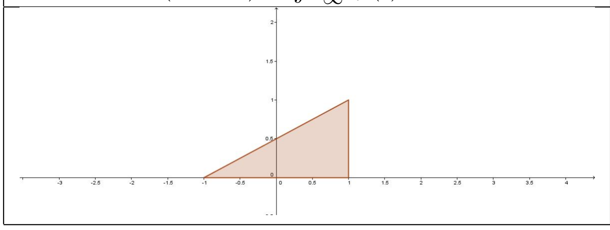
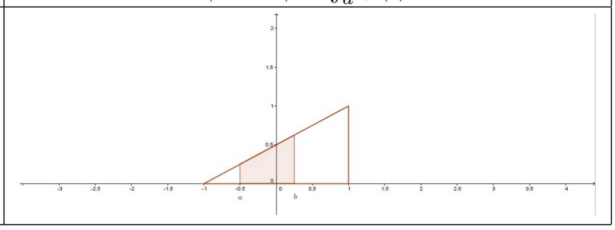
**Définition :**
Soit $X$ est une variable aléatoire qui à chaque issue d'un univers associe un sous intervalle $I = [a; b]$ de $\mathbb{R} = ]-\infty\ ;\ +\infty[$, et $f$ une fonction :

- continue sur $\mathbb{R}$
- positive sur $\mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$

On dit que $X$ suit la loi de **densité** $f$.
La **loi de probabilité** de densité $f$ sur $\mathbb{R}$ est telle que pour tout intervalle $I = [a; b]$ contenu dans $\mathbb{R}$ , la probabilité de l'événement $\{X \in I\}$ est :
L'aire de l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x; y)$ tels que
$a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.
On note alors : $P(X \in I) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

*Exemple - exercice :*
Soit $f$ définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = 0,5x + 0,5$ et $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$. Montrer que $f$ est une fonction de densité sur $\mathbb{R}$.

*Illustration :*

| $P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$ | $P(X \in I) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ |
|---|---|
|  |  |

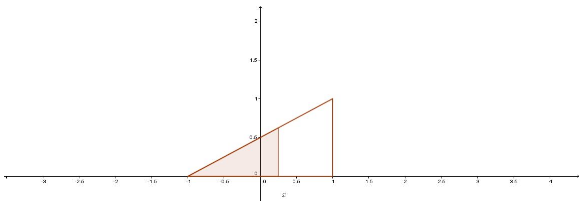
### 1.2 Propriétés

**Théorème :**
Soit $X$ une variable aléatoire continue sur un intervalle $I$ , munie d'une fonction de densité $f$ sur $\mathbb{R}$.

- $P(X \in \mathbb{R}) = 1$ (représente la probabilité de l'univers)
- $0 \leqslant P(X \in I) \leqslant 1$ (une probabilité est comprise entre 0 et 1)
- $\forall c \in \mathbb{R}, P(X = c) = 0$ et $\forall c \in \mathbb{R}, P(X < c) = P(X \leqslant c)$ (propriété propre au variable continue, en un point $c$, la probabilité est nulle)
- Si $[c; d] \cap [k; l] = \emptyset$ alors $P(X \in [c; d] \cup [k; l]) = P(X \in [c; d]) + P(X \in \cup[k; l])$ (union disjointe ou incompatible)
- $\forall c \in [a; b], P(X \in [a; c]) + P(X \in [c; b]) = P(X \in [a; b])$ (relation de Chasles)

## 1.3 Fonction de répartition $F$

**Définition :**
Soit une variable aléatoire continue sur un intervalle $\mathbb{R}$, munie d'une fonction de densité $f$ sur $I$.
On appelle fonction de répartition $F$ sur $\mathbb{R}$ la fonction qui à un nombre réel $x$ associe
$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.




*Remarque :*
$a$ et $b$ sont deux nombres réels, $a < b$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} = 1$.
2. $P(X > x) = 1 - F(x)$.
3. $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

## 1.4 Espérance

**Définition :**
Soit $X$ une variable aléatoire continue sur $[a; b]$ , munie d'une fonction de densité $f$ sur $\mathbb{R}$.
L'espérance de densité $f$ sur $\mathbb{R}$ est
$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} = x f(x)\,\mathrm{d}x$.

## 1.5 Écart-type

**Définition : variance**
Soit $X$ une variable aléatoire continue sur $\mathbb{R}$ , munie d'une fonction de densité $f$ sur $\mathbb{R}$.

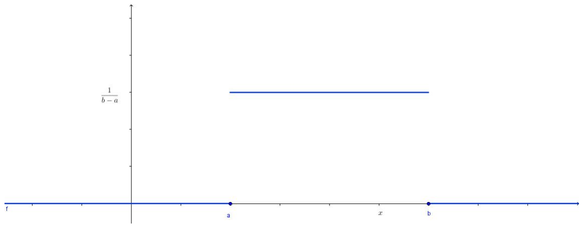
- La variance de densité $f$ sur $\mathbb{R}$ est
  $V(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(x - E(X))^2\,\mathrm{d}x$.
- L'écart-type de densité $f$ sur $I$ est
  $\sqrt{V(X)}$.

**Théorème :**
$V(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - E(X)^2$

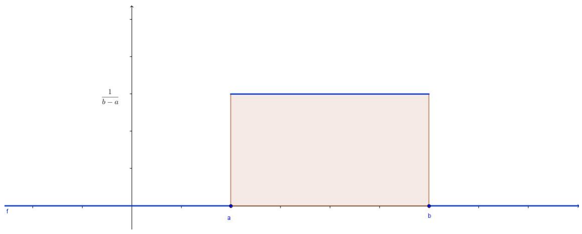
# 2 Loi uniforme

## 2.1 fonction de densité

**Définition :**
La fonction de densité de la loi uniforme est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall t \in [a;b], f(t) = \dfrac{1}{b-a}$
$\forall t \in \mathbb{R} \setminus [a;b], f(t) = 0$



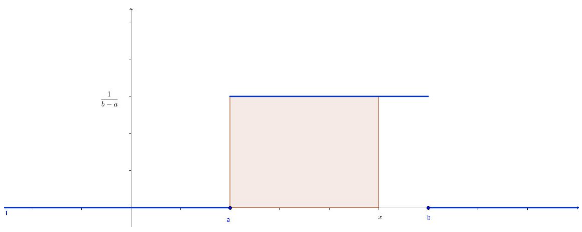
*Remarque :*
Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.



## 2.2 fonction de répartition $F$

**Théorème :**

- $\forall x < a, F(x) = 0$.
- $\forall x \in [a;b], F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$.
- $\forall x > b, F(x) = 1$.



*Démonstration :*
Pour chaque item calculer les intégrales et vérifier le résultat annoncé.

- $\forall x < a, \forall c < x, F(x) = \displaystyle\int_c^x f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- $\forall x \in [a;b], F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x-a}{b-a}$.
- $\forall x > b, \forall c > x, F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

### 2.3 Espérance et écart-type

**Théorème :**
l'espérance $E$ d'une loi uniforme est :

$$E(x) = \frac{b+a}{2}$$

l'écart-type est :

$$\sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

*Démonstration : laissée à faire Exercice :*

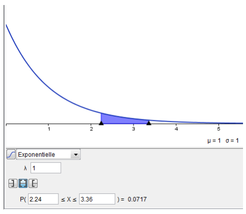
A la station Georges Périn, un bus passe toutes les 6 minutes. On note $X$ le temps d'attente d'une personne à l'arrêt de bus. On admet que $X$ suit une loi continue uniforme sur l'intervalle $[0; 6]$.

1. Quelle est la probabilité que la personne attende exactement 4 minutes.
2. Calculer la probabilité que la personne attende entre 3 et 4 minutes.
3. Calculer que la personne attende moins de 2 minutes.
4. Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire $X$.

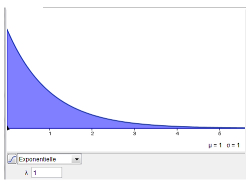
## 3 Loi exponentielle

### 3.1 Fonction de densité

**Définition :**
La fonction de densité de la loi uniforme est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall t \in [0\ ;\ +\infty[, f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
$\forall t \in ]-\infty\ ;\ 0[, f(t) = 0$



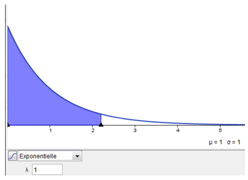
*Remarque :*
Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$



## 3.2 fonction de répartition $F$

**Théorème :**

- $\forall x < 0, F(x) = 0$.
- $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[, F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.



*Démonstration :*
Pour chaque item calculer les intégrales et vérifier le résultat annoncé.

## 3.3 Espérance et écart-type

**Théorème :**
l'espérance $E$ d'une loi exponentielle est :

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

l'écart-type est :

$$\sigma(x) = \frac{1}{\lambda}$$

*Démonstration : laissée à faire*

*Exercice :*
Soit une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ et $t$ un réel positif

1. Justifier que $P\left(X \in [t\ ;\ +\infty[\right) = 1 - P\left(X \in [0\ ;\ t]\right)$.
   En déduire $P\left(X \in [t\ ;\ +\infty[\right)$.
2. Soit $s$ un réel positif, montrer que $P_{X\in[t\ ;\ +\infty[}\left(X \in [t+s\ ;\ +\infty[\right) = P\left([s\ ;\ +\infty[\right)$.
3. Montrer que $P_{X\in[t\ ;\ +\infty[}\left(X \in [t\ ;\ t+s]\right) = P\left([0\ ;\ s]\right)$.