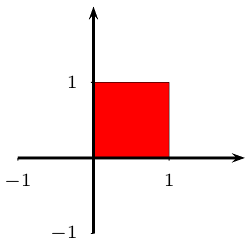
Aires et intégrales

Note :
Dans tout ce cours, les aires sont exprimées en unité d'aire (u.a : aire du rectangle de côté 1×1 dans un repère orthogonal) et les volumes sont exprimés en unité de volume (u.v : volume d'un parallélépipède de côté $1 \times 1 \times 1$ dans un repère orthogonal) :

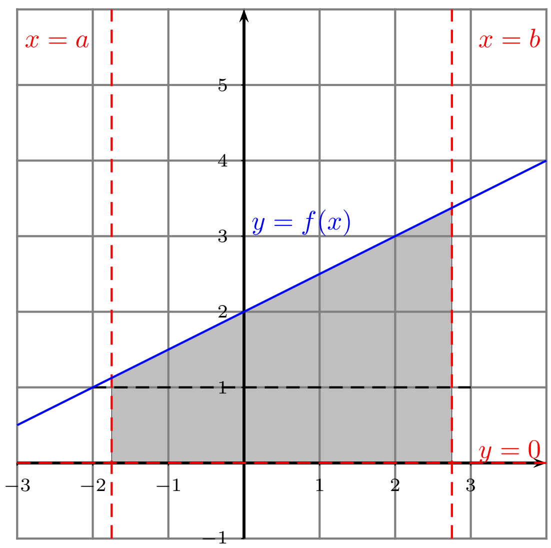


1 Aires et intégrales d'une fonction continue et positive

1.1 Introduction

Activité :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0.5x + 2$. Soit a et b deux nombres réels, on souhaite exprimer en fonction de a et b ($a < b$) l'aire délimitée par les droites $x = a$ et $x = b$, la droite $y = 0$ et la courbe de la fonction f :

- $a \leqslant x \leqslant b$
- $0 \leqslant y \leqslant f(x)$



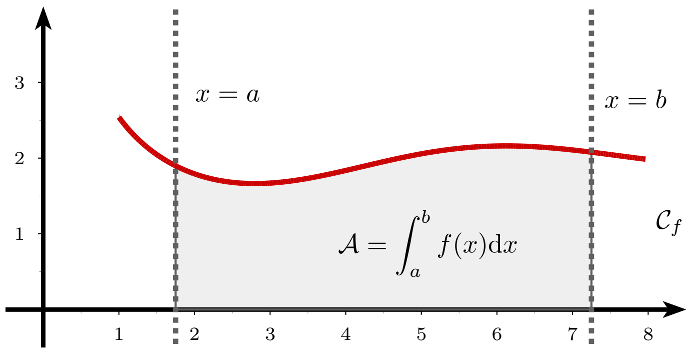
1. Sur quel intervalle f est continue et positive ?
2. La figure grisée est un trapèze, calculer son aire pour $a = -1$ et $b = 2$, on note cette aire $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.
3. Avec le même principe de notation, calculer l'aire $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.
4. Avec le même principe de notation, calculer l'aire $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

1.2 Définition

Définition :
Soit une fonction f définie et positive sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$.
L'aire $\mathcal{A}$ du domaine défini par :

- $a \leqslant x \leqslant b$
- $0 \leqslant y \leqslant f(x)$

L'aire $\mathcal{A}$ est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

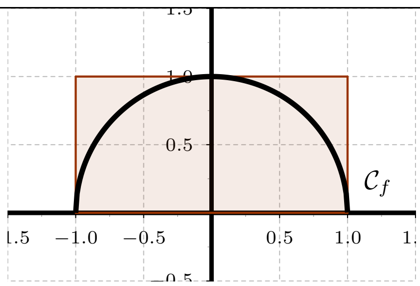
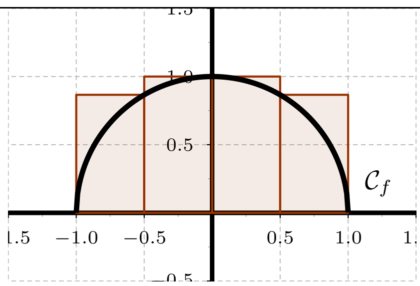
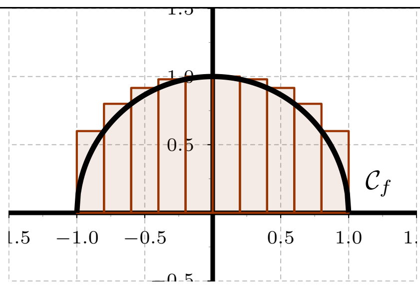


Remarques :

- Dans la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ la lettre x est muette, on peut la remplacer par n'importe quelle lettre par exemple t : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

1.3 Une interprétation des symboles $\int$ et dx

Activité :
Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé ci-dessous.
On donne des étapes d'approximations de l'aire $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$ (l'aire sous la courbe) par la somme des aires $\int$ de n rectangles de même largeur dx, avec n de plus en plus grand :

$n = 1$	$n = 4$	$n = 10$
		

1. Pour approcher l'aire sous la courbe, recopier et compléter l'algorithme suivant :
   Algorithme pour $n = 10$:

   $n \longrightarrow 10$
   d$x \longrightarrow$ ...
   $\int \longrightarrow$...
   pour i allant de ... à ... :
   $\qquad \int \longrightarrow$....
   fin pour

2. Traduire cet algorithme sur votre calculatrice et donner la valeur de la somme $\int$ des rectangles pour $n = 10$.

3. Montrer que l'aire cherchée est celle du demi-cercle de centre O (origine du repère) et de rayon 1. Quelle est la valeur exacte de cette aire ?

Remarque : plus n est grand plus le pas dx (la largeur des rectangles) est petit, la somme $\int$ des aires des rectangles approche l'aire $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

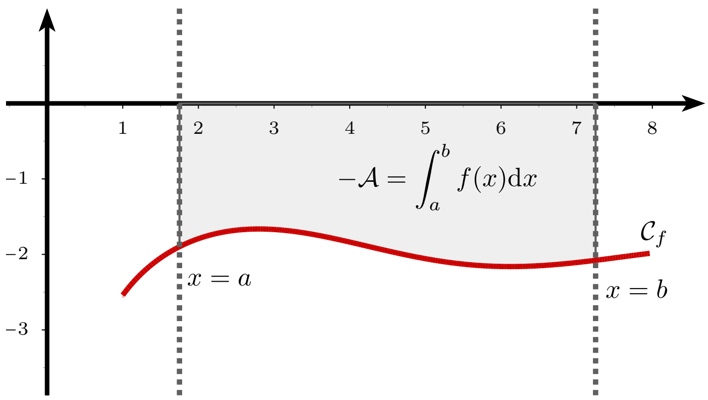
2 Intégrale d'une fonction continue

2.1 Intégrale d'une fonction continue et négative

Définition :
Soit f une fonction continue et négative sur $[a\ ;\ b]$. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine défini par :

- $a \leqslant x \leqslant b$
- $f(x) \leqslant y \leqslant 0$

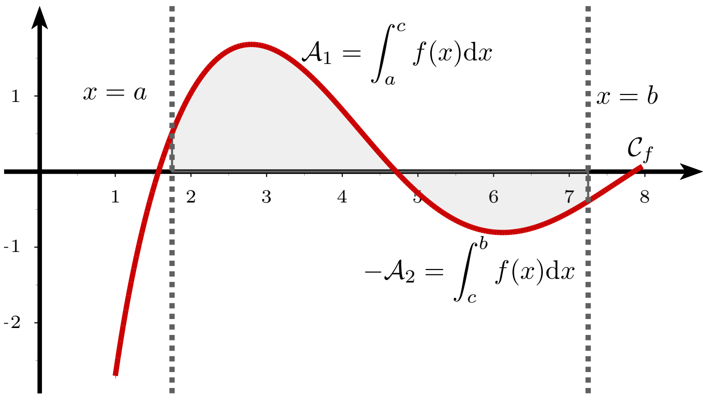
alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathcal{A}$.



2.2 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition : Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. Sur $[a\ ;\ b]$, on note $\mathcal{A}_1$ la somme des aires où $f(x)$ est positive et $\mathcal{A}_2$ la somme des aires où $f(x)$ est négative.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$.



Remarque :

$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

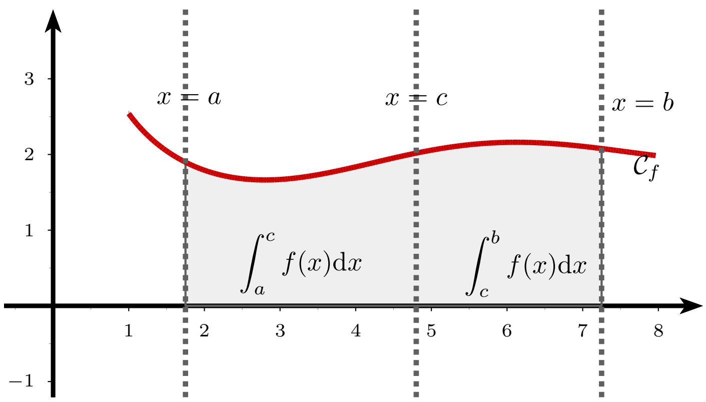
3 Propriétés

Théorème : linéarité de l'intégrale
Soit deux fonctions f et g définies et continues sur l'intervalle $[a;b]$, λ un nombre réel non nul.

- $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Théorème : relation de Chasles
Soit deux fonctions f définies et continues sur l'intervalle $[a;b]$, c un nombre réel de $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



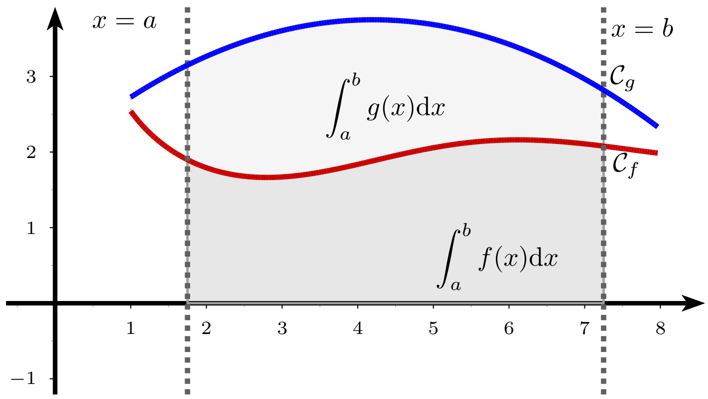
Théorème : positivité de l'intégrale
Soit une fonction f définies et continues sur l'intervalle $[a;b]$, telle que pour tout x de l'intervalle $[a;b]$, $f(x) \geqslant 0$. On a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

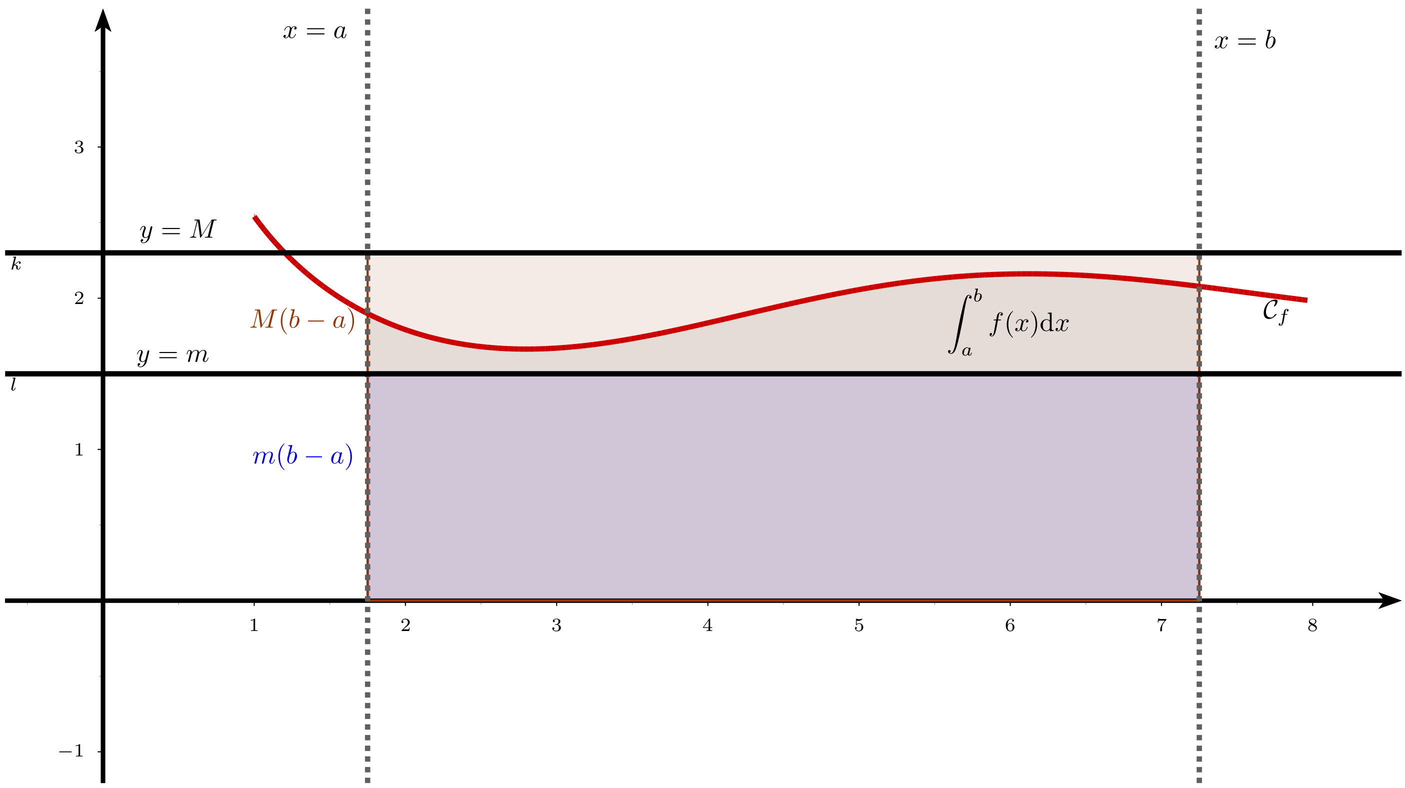
Corollaire 1 : comparaison de deux intégrales
Soit deux fonctions f et g définies et continues sur l'intervalle $[a;b]$, telles que pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$. On a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration :
On compare $f(x) - g(x)$ à 0 et on utilise le théorème de positivité ainsi que la linéarité.



Corollaire 2 : inégalité de la moyenne
Si $\forall x \in [a\ ;\ b], m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.
Démonstration :
Utiliser le corollaire précédent.



4 Moyenne

Définition :
Soit une fonction f continue définie sur l'intervalle $[a;b]$. On appelle valeur moyenne de $f(x)$ sur l'intervalle $[a;b]$ le nombre :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple-exercice :
Soit la fonction f définie sur $[-2;3]$ par $f(x) = 0,5x + 2$. Calculer la valeur moyenne de $f(x)$ sur l'intervalle $[-2;3]$ et interpréter graphiquement cette valeur.