Fonction logarithme

1 Définition

Activité :
Soit la fonction exponentielle, on pose $f(x) = e^x$ dont on donne la représentation.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 10]$. Donner une valeur approchée de α, arrondie à 10^{-1}.
2. Soit k un nombre réel. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $e^x = k$ suivant les valeurs de k.
3. Résoudre $e^x = 1$.

Définition :
Soit x un nombre réel strictement positif. L'équation $e^y = x$, d'inconnue y admet une unique solution qui dépend de la valeur de x, on la notera $\ln(x)$ et on appellera ce nombre **logarithme (népérien)** de x.

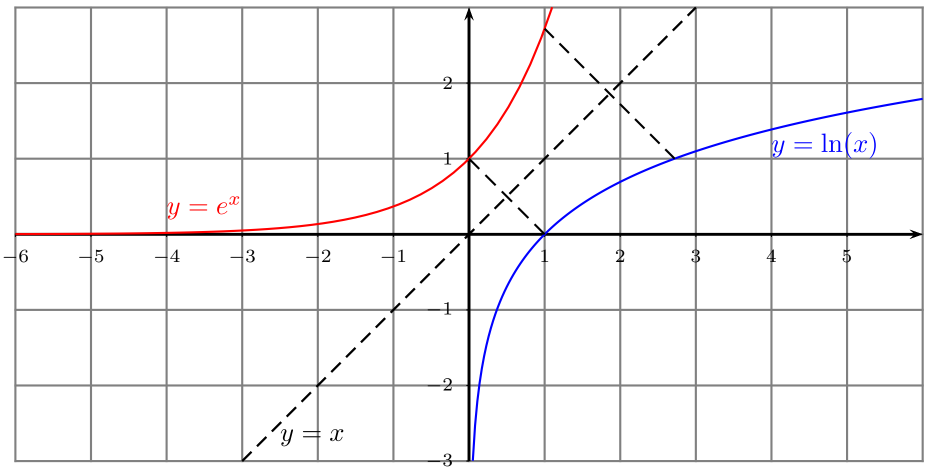
$$\forall x \in]0; +\infty[,\ e^y = x \iff y = \ln(x).$$

On définit ainsi une fonction ln de domaine de définition $]0; +\infty[$:

$$\begin{array}{llll} \ln : &]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

Remarques :

- La fonction logarithme est la fonction réciproque de la fonction exponentielle (les courbes associées sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ dans un repère orthonormé.



- $\ln(1) = 0$.
- $\forall x \in]0; +\infty[, e^{\ln(x)} = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.
- La fonction logarithme est continue.
- $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$

2 Propriétés algébriques

activité :
Soit a et b deux nombres strictement positifs.
Montrer que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
Indication : on pourra utiliser la composition avec la fonction exponentielle et comparer $e^{\ln(ab)}$ *et* $e^{\ln(a)+\ln(b)}$.

Théorème :
Soit x et y deux nombres strictement positifs, $n \in \mathbb{Z}$.

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

Exemple-Exercice :
Montrer que pour tout nombre x strictement positif :

1. $\ln\left(x^3\right) - \ln(x) = 2\ln(x)$
2. $\ln(xe^x) = x + \ln(x)$
3. $\ln(x\sqrt{x}) = \dfrac{3}{2}\ln(x)$

3 Étude analytique de la fonction logarithme

3.1 Continuité et dérivée

Propriété :
La fonction logarithme est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et : $\forall x \in]0;+\infty[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration :
Soit x strictement positif et la relation $e^{\ln(x)} = x$

1. Exprimer la dérivée $\left(e^{\ln(x)}\right)'$ puis la dérivée $(x)'$.
2. En déduire $(\ln(x))'$ et la continuité de la fonction logarithme.

3.2 Variations et signe

Propriétés :
La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
Démonstration laissée en exercice, vous ferez le tableau de variations de la fonction logarithme.

Théorème :
$\forall x \in]0;1[; \ln(x) < 0$
$\forall x \in]1;+\infty[; \ln(x) > 0$
Démonstration par lecture du tableau de variations, faites le tableau de signe $\ln(x)$.

Conséquence :
$\forall a$ et $b \in]0\ ;\ +\infty[$,
$\ln(a) < \ln(b) \Longleftrightarrow a < b$.

3.3 Limites

Propriétés :

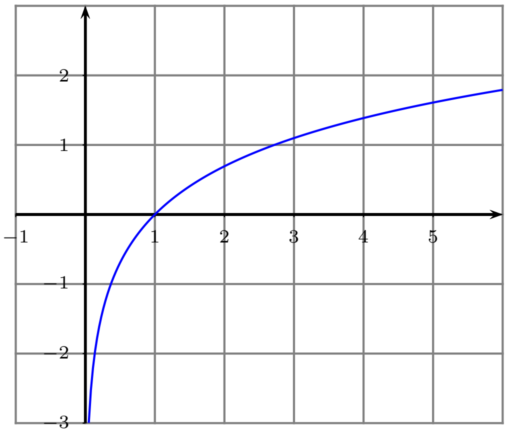
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Démonstration :

1. Soit un réel A strictement positif.
   Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que pour tout $x > x_0$, $\ln(x) > A$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)$.
2. En posant $X = \dfrac{1}{x}$ déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x)$ $(x > 0)$.

3.4 Représentation graphique et tableau de variations et de signe

x	0		1		$+\infty$
$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$		$+$	1	$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	



Exercice :

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln((x)}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln((x-1)}{x}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente en 1. Tracer cette tangente sur le graphique précédent.
3. Donner la valeur pour laquelle $\ln(x) = 1$ et la valeur pour laquelle $\ln(x) = 0$.

3.5 Exercices

Les questions sont indépendantes :

1. Étudier les variations de la fonction f : sur $]0; +\infty[$, $f(x) = 3x^2 + x - 4\ln(x)$
2. Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{5}{x} \mathrm{d}x$

4 Limites à connaitre

Propriétés :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$

Démonstration :

1. Posons $X = \ln(x)$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.

2. Posons $X = \dfrac{1}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x)$.

Exercice :
Soit la fonction $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$, $a > 0$ et $a \neq 1$.

1. Étudier la fonction $\log_a$:
   - domaine de définition
   - continuité et dérivabilité
   - limites aux bornes de l'ensemble de définition
   - valeurs remarquables et tangentes en ces valeurs
   - variations
   - courbes (sur GeoGebra)
2. Donner est la fonction réciproque de la fonction $\log_a(x)$ en particulier $\log_{10}(x)$.

5 Forme composée (voir cours complément sur la dérivation)

Théorème :
Soit u une fonction définie, strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $\ln(u)$ est définie et dérivable sur I et on a :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

Exercice :
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $\ln(3x+1)$ sur $\left]\dfrac{-1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.
2. $\ln\left(x^2\right)$ sur $\mathbb{R}^*$.