Fonction exponentielle

1 Introduction : définition de la fonction exponentielle

Activité :
Proposition : Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration de l'unicité de cette fonction (on admet l'existence de la fonction f) :

1. Montrons qu'une fonction f qui vérifie la proposition est non nulle ($\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$) et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$: considérons une fonction f qui vérifie la proposition et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0$.
   (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1$.
   (c) En déduire :
      - $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.
      - $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$
2. Unicité de la fonction f, supposons qu'il existe une deuxième fonction f_1 qui vérifie la proposition :
   Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{f_1(x)}{f(x)}$.
   (a) Justifier que la fonction h est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 0$.
   (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = f(x)$.

Définition :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle, on la note exp :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x) \text{ et } \exp(0) = 1.$$

Propriétés :
$\forall x \in \mathbb{R}$:

- $\exp(x) \neq 0$
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

2 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Propriété principale :
$\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$, $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Démonstration :
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{\exp(x + b)}{\exp(b)}$ (b est un nombre réel).

1. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = h(x)$ et $h(0) = 1$.
2. En déduire la fonction h et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x + b) = \exp(x) \exp(b)$.

3 Notation e pour la fonction exponentielle

Définition :
On note e le nombre $\exp(1)$.
Avec la calculatrice, on a $e \simeq 2,72$.

Propriétés :
$\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$:

- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(2a) = (\exp(a))^2$,
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$, $n \in \mathbb{N}$,
- $\exp(-na) = \dfrac{1}{exp(na)} = \dfrac{1}{(\exp(a))^n} = \left(\dfrac{1}{\exp(a)}\right)^n = \exp(-a)^n$, $n \in \mathbb{N}$,
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$, $n \in \mathbb{Z}$,
- $\exp(n) = \exp(1n) = \exp(1)^n = e^n$, $n \in \mathbb{Z}$,

Notation :
La dernière propriété précédente permet de justifier la notation $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \neq 0$,
- $e^0 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$, $e^{a+b} = e^a e^b$,
- $\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $e^{nx} = (e^x)^n$

Exemple-exercice :
Simplifier les expressions suivantes :

1. $e^{x+2}e^{-x+1}$
2. $\dfrac{e^{2x}}{\left(e^{x-1}\right)^2}$
3. $e^{-2x} - \dfrac{\left(e^x\right)^2 + 1}{e^{2x}}$

Exemple-exercice :
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$ est une fonction constante.

4 Étude analytique de la fonction exponentielle

Propriétés : signe et variation
La fonction exponentielle est

- Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$,
- strictement positive : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$,
- strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$ par définition, que peut-on dire de la continuité de la fonction exponentielle ?
2. $e^0 = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \neq 0$, en déduire $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ (raisonner par l'absurde et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires).
3. En déduire les variations de la fonction f.

Conséquences :

- $\forall x \leqslant 0, 0 < e^x \leqslant 1$,
- $\forall x \geqslant 0, e^x \geqslant 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$e^x = e^y \Longleftrightarrow x = y$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$e^x < e^y \Longleftrightarrow x < y$$

Exercice :
Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $e^{x+2} = e^{2x}$
2. $e^{-3x} < 0$
3. $3e^{2x} + 2 > 5$

Propriétés : limites

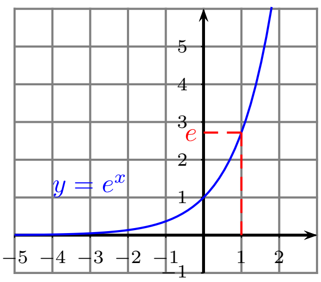
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration :

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}$, en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$.

Tableau de variations de la fonction exponentielle et courbe représentative :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(e^x)' = e^x$			$+$		
e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Exercice :

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente en 0.
3. Justifier que la fonction exp est au dessus de toutes ses tangentes.

5 Limites à connaitre

Propriétés :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Démonstration :
Soit la fonction g définie sur $I =]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

1. Montrer que $g(x)$ est strictement positive sur I.
2. En déduire que $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$ sur I et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.
3. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$.

6 forme composée (voir cours complément sur la dérivation)

Théorème :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est définie et dérivable sur I et on a :

$$(e^u)' = u'e^u.$$

Exercice :
Après avoir calculé les fonctions dérivées des fonctions f et g, étudier les variations des fonctions f et g. On donne les expressions suivantes :

1. $f(x) = e^{-0,5x+2}$.
2. $g(x) = e^{3x^2}$.
3. $h(x) = e^{-kx}$ où k est un nombre réel positif.
4. $i(x) = e^{-kx^2}$ où k est un nombre réel positif.

Exercice :
Soit u une fonction définie sur un intervalle I, montrer que e^u a les mêmes variations que celle de u.