Continuité

1 Notion de continuité

Soit f une fonction définie sur une intervalle I.
On dit que la fonction f est continue si le tracer de la courbe de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$ se fait de manière continue (sans lever le crayon).
Par convention, les flèches obliques du tableau de variations indiquent que la fonction est continue et strictement monotone (croissante ou décroissante).

Exemple-exercice :

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
   $\begin{cases} f(x) = 3x + 1 & x < 2 \\ f(x) = 2x - 1 & x \geqslant 2 \end{cases}$
   Que dire de la continuité de la fonction f ?

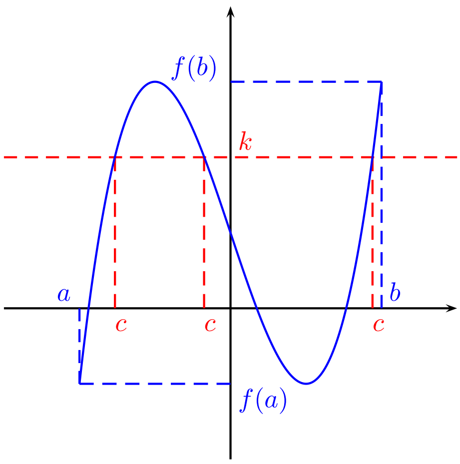
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Donner le tableau de variation et commenter la continuité de la fonction f.

Théorème : (admis)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

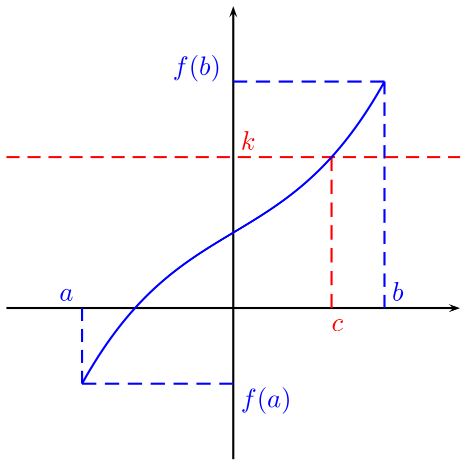
Conséquence :
Les fonctions de référence sont continues par intervalles.

2 Application à la recherche de solution de l'équation $f(x) = k$

Théorème : valeurs intermédiaires
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; b]$.
Si f est continue sur I alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre c de I tel que $f(c) = k$.



Théorème :
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; b]$.
Si f est continue sur I et strictement monotone sur I alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique un nombre c de I tel que $f(c) = k$.



Remarque :
Pour justifier que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a; b]$ on doit vérifier les trois points suivants :

- f est continue sur $[a; b]$.
- f est strictement monotone sur l'intervalle $[a; b]$.
- k est dans l'intervalle $[f(a); f(b)]$, si f est croissante, $[f(b); f(a)]$ si f est décroissante.

Exemple-exercice :
Soit f définie sur $[0; 10]$ par l'expression $f(x) = x^3 + x - 3$.

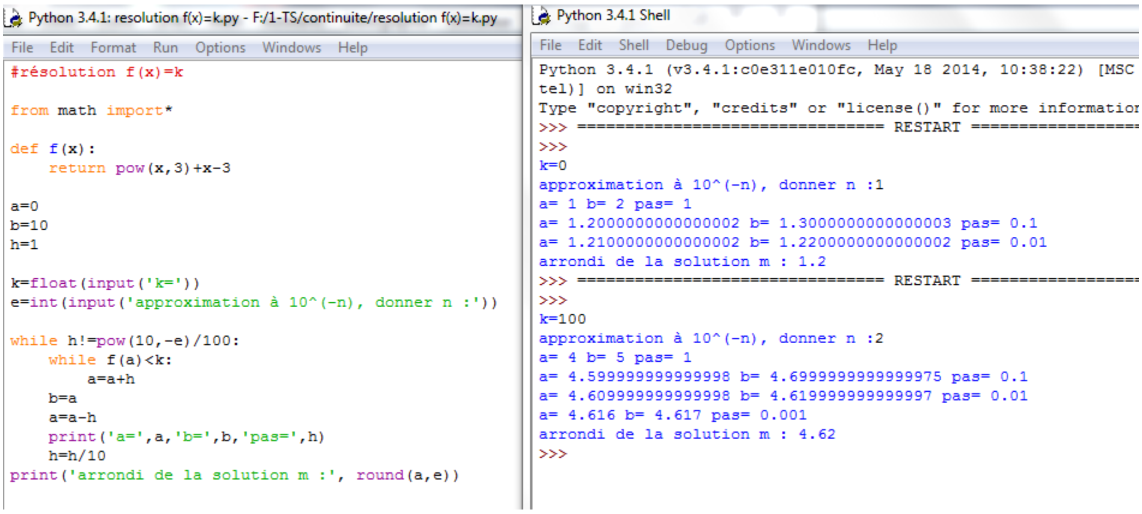
1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0; 10]$.
2. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; 10]$ (on vérifiera les trois points de la remarque). On note α la solution.
   (b) Utilisation de la calculatrice : à l'aide d'une table de valeurs donner un intervalle d'amplitude p qui encadre α :
      i. $p = 1$
      ii. $p = 0,1$
      iii. $p = 0,01$
   (c) A partir du dernier intervalle d'amplitude $p = 0,01$ déduire une valeur approchée de α à $0,1$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 100$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; 10]$ (on vérifiera les trois points de la remarque). On note β la solution, donner une valeur approchée à $0,01$ de β.

4. L'algorithme suivant permet de déterminer une valeur approchée de la solution à l'équation $f(x) = k$ si elle existe :

Algorithm 1 Équation $f(x) = k$

ENTRÉES: k, ϵ (k et ϵ sont donnés par l'utilisateur de l'algorithme, ϵ est la valeur de l'approximation de la forme 10^{-n} où n est entier.)
SORTIES: μ (μ est sorti par l'algorithme)
  $a = 0$, $b = 10$ (initialisation de la plus petite borne de l'intervalle)
  $h = 1$ (initialisation du pas d'incrémentation)
  tantque $h \neq \dfrac{\epsilon}{100}$ **faire**
    tantque $f(a) < k$ **faire**
      a prend ....
    fin tantque
    b prend ....
    a prend ....
    $h = h/10$
  fin tantque
  μ prend arrondi de a à ϵ.

L'algorithme programmé avec Python :


Python 3.4.1: resolution f(x)=k.py - F:/1-TS/continuite/resolution f(x)=k.py

File Edit Format Run Options Windows Help

```
#résolution f(x)=k

from math import*

def f(x):
    return pow(x,3)+x-3

a=0
b=10
h=1

k=float(input('k='))
e=int(input('approximation à 10^(-n), donner n :'))

while h!=pow(10,-e)/100:
    while f(a)<k:
        a=a+h
    b=a
    a=a-h
    print('a=',a,'b=',b,'pas=',h)
    h=h/10
print('arrondi de la solution m :', round(a,e))
```

Python 3.4.1 Shell

File Edit Shell Debug Options Windows Help

```
Python 3.4.1 (v3.4.1:c0e311e010fc, May 18 2014, 10:38:22) [MSC
tel)] on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more informatio
>>> ================================ RESTART ==================
>>>
k=0
approximation à 10^(-n), donner n :1
a= 1 b= 2 pas= 1
a= 1.2000000000000002 b= 1.3000000000000003 pas= 0.1
a= 1.2100000000000002 b= 1.2200000000000002 pas= 0.01
arrondi de la solution m : 1.2
>>> ================================ RESTART ==================
>>>
k=100
approximation à 10^(-n), donner n :2
a= 4 b= 5 pas= 1
a= 4.599999999999998 b= 4.6999999999999975 pas= 0.1
a= 4.609999999999998 b= 4.619999999999997 pas= 0.01
a= 4.616 b= 4.617 pas= 0.001
arrondi de la solution m : 4.62
>>>
```