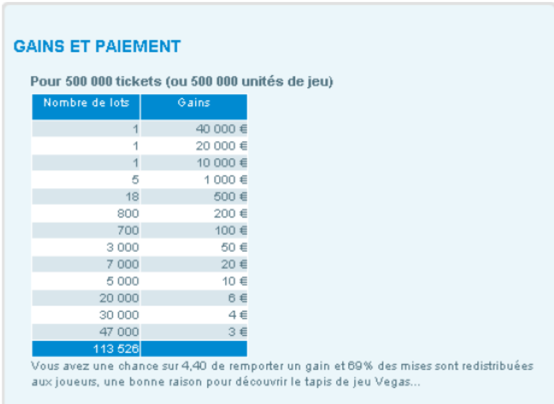
Variable aléatoire

1 Introduction

Exemple-exercice :
Une loterie, de 500 000 billets à 3 €, permet de gagner des lots :



GAINS ET PAIEMENT

Pour 500 000 tickets (ou 500 000 unités de jeu)

Nombre de lots	Gains
1	40 000 €
1	20 000 €
1	10 000 €
5	1 000 €
18	500 €
800	200 €
700	100 €
3 000	50 €
7 000	20 €
5 000	10 €
20 000	6 €
30 000	4 €
47 000	3 €
113 526	

Vous avez une chance sur 4,40 de remporter un gain et 69% des mises sont redistribuées aux joueurs, une bonne raison pour découvrir le tapis de jeu Vegas...

On note X le gain réel (exprimé en €) du joueur. En effet, achète un billet qui rapporte le lot "4 €" alors son gain réel $X = 1$. Dans ce cas, la probabilité de gagner 1 € sera notée $P(X = 1)$.

1. Dans quel ensemble Ω_X, X prend ses valeurs ?
2. Calculer $P(X = -3)$, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 39997)$.
3. Calculer dans un tableau, donner les valeurs de $P(X = k)$ pour tout $k \in \Omega_X$ (loi de probabilité de X) :

$X = k$	$P(X = k)$
$X = -3$	
$X = 0$	
...	

4. Calculer le gain réel moyen, on le notera $E(X)$, puis l'écart-type du gain réel, on le notera $\sigma(X)$.
5. Justifier l'affirmation faites par la Française des jeux en bas du tableau du jeu.

2 Loi de probabilité

Définition :
Soit une probabilité P définie sur l'univers Ω à valeur dans $[0; 1]$ et une application X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui a tout événement de l'univers associe un nombre réel x_i.
X est appelée variable aléatoire. $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est l'ensemble des n probabilités de $P(X = x_i)$.

Remarque :
$P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

3 Espérance et écart-type

Définition : espérance
Soit $X = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ une variable aléatoire définie sur un univers Ω.
On appelle espérance mathématique d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$ la valeur suivante :

$$E(X) = P(X = x_1)\, x_1 + P(X = x_2)\, x_2 + ... + P(X = x_n)\, x_n = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)\, x_i$$

Propriété :
Soit a et b deux nombres réels :

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

Démonstration : laissée en exercice

Définition : écart-type
Soit $X=\{x_1;x_2;...;x_n\}$ une variable aléatoire définie sur un univers Ω.
On appelle variance mathématique d'une variable aléatoire X, notée $V(X)$ la valeur suivante :

$$V(X)=P\left(X=x_1\right)\left(x_1-E(X)\right)^2+P\left(X=x_2\right)\left(x_2-E(X)\right)^2+...+P\left(X=x_n\right)\left(x_n-E(X)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}P\left(X=x_i\right)\left(x_n-E(X)\right)^2$$

L'écart-type $\sigma(X)$ est égal à $\sqrt{V(X)}$.

Propriété :

- $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$
- Soit a un nombre réel :

$$V(aX)=a^2V(X)$$

Démonstration : laissée en exercice