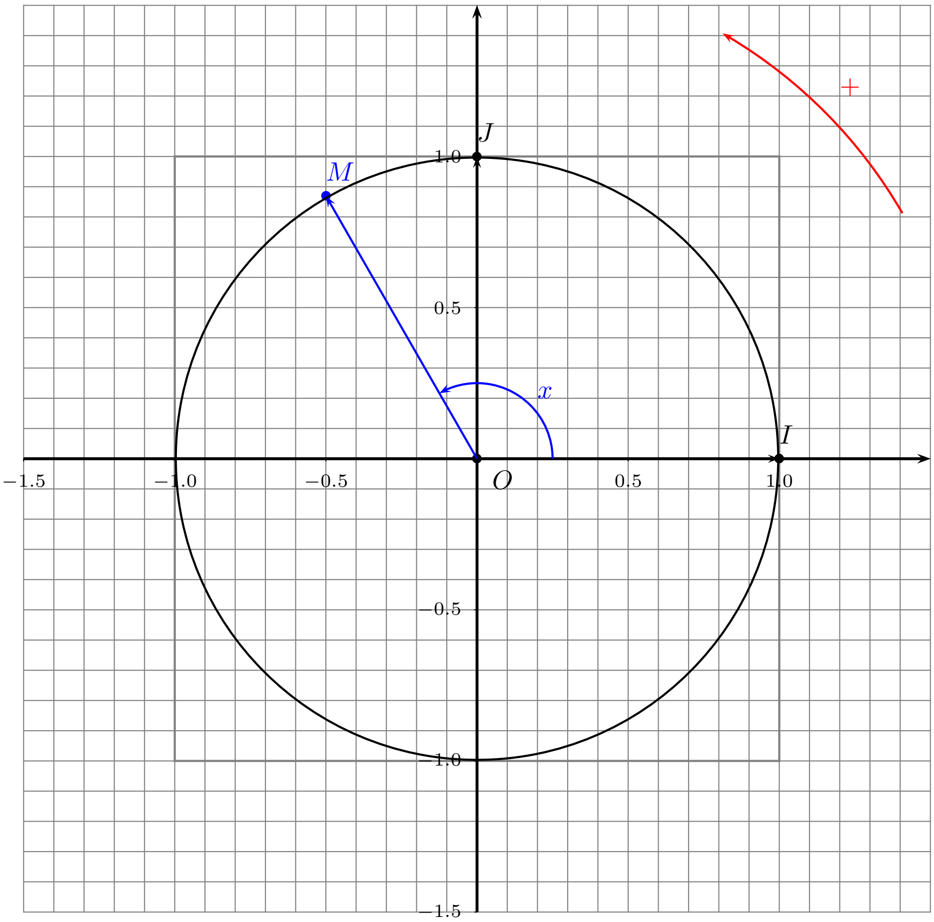
Trigonométrie

1 Cercle trigonométrique : cosinus et sinus

1.1 Le cercle trigonométrique et angles orientés

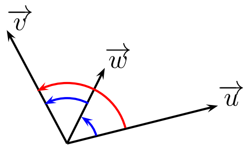
Définition : Soit un repère orthonormal (O,I,J).
On appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre O et de rayon 1. I est alors appelé origine du cercle.
Le sens trigonométrique (sens positif) du cercle est le sens contraire de celui de la rotation des aiguilles d'une montre.
Sur la figure, l'angle marqué est orienté et noté $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$, on indique ainsi un sens à l'angle, sa mesure x est exprimée en radian et sa valeur peut être négative.
Pour tout point M du cercle, il existe une seule valeur d'angle $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$ comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, cette valeur est appelée mesure principale de l'angle.



1.2 Relation de Chasles

Théorème (admis) :
Soit trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan. La relation de Chasles avec les angles orientés donne :

$$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w})+(\overrightarrow{w};\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$$



1.3 Cosinus et sinus

Définition :
Soit le cercle trigonométrique et un angle $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$ de mesure x exprimée en radian. On appelle cosinus de l'angle x, noté $\cos(x)$, l'abscisse du point M et sinus de l'angle, noté, $\sin(x)$, l'ordonnée du point M.
Ainsi on a : $M(\cos(x);\sin(x))$.

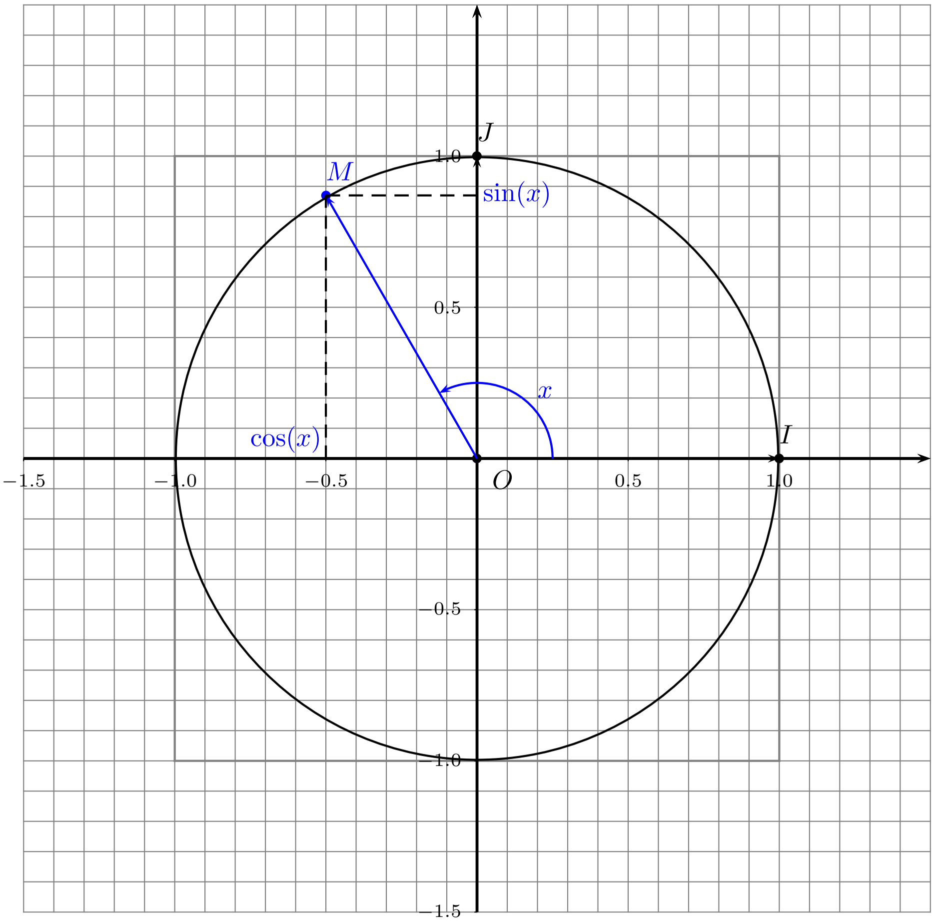


Tableau des valeurs remarquables :
Le tableau suivant est à connaitre parfaitement :

Angle x en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Formules du cosinus et du sinus :
Soit x un nombre réel quelconque.

1. $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$
2. $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$, on dit que la fonction cos est périodique de période 2π.
3. $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$, on dit que la fonction sin est périodique de période 2π.
4. $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$
5. $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$
6. $\cos(-x)=\cos(x)$, la fonction cos est paire.

7. $\sin(-x) = -\sin(x)$, la fonction sin est impaire.
8. $\cos(-x+\pi) = -\cos(x)$
9. $\sin(-x+\pi) = \sin(x)$

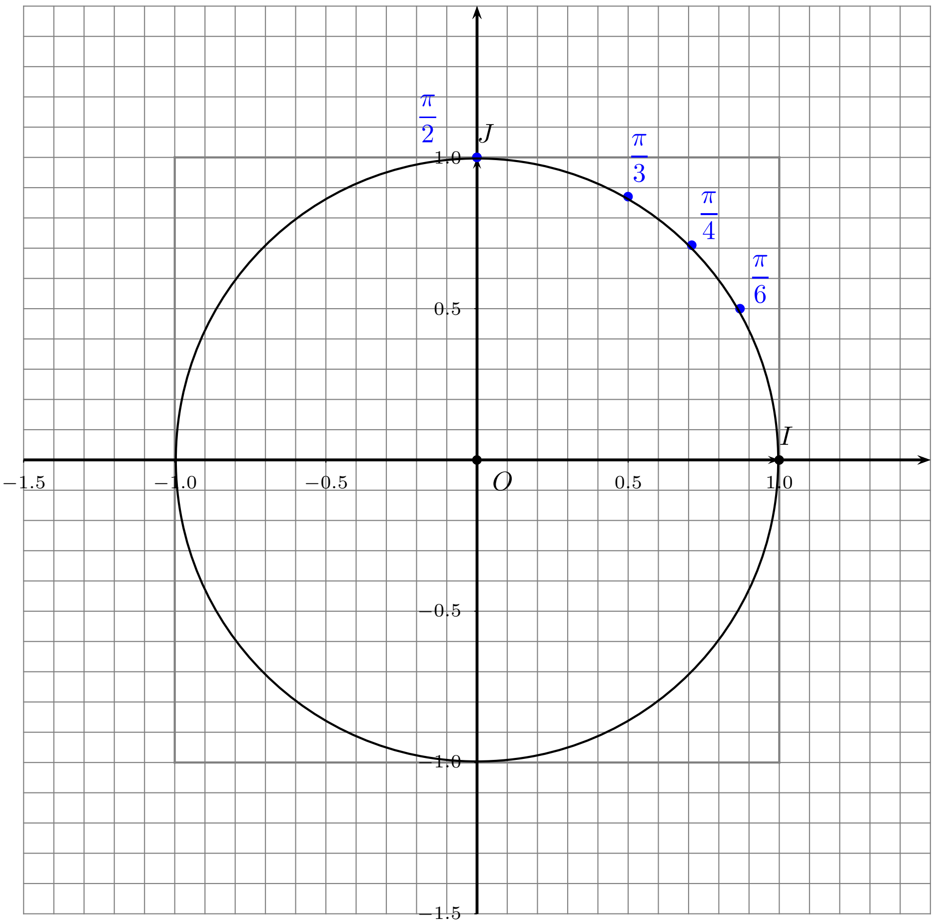
Exemple-exercice :
A partir du tableau des valeurs remarquables et des formules précédentes, retrouver les valeurs suivantes (aussi remarquables), vous placerez les valeurs d'angle x sur le cercle trigonométrique comme celles indiquées, correspondant au point M tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right) = x$:

1) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ 3) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

4) $\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$ 5) $\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$ 6) $\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

7) $\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ 8) $\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ 9) $\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

10) $\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ 11) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ 12) $\cos\left(\frac{31\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{31\pi}{3}\right)$



1.4 Equations

Soit les deux équations suivantes :

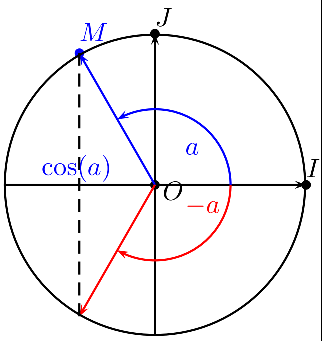
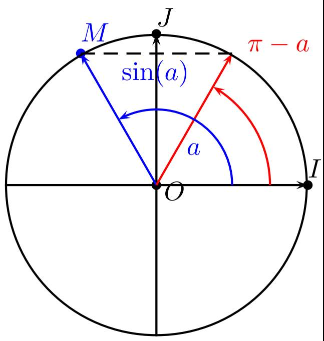
$$\cos(x) = p \qquad (1)$$

$$\sin(x) = p \qquad (2)$$

Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de x correspondantes pour chacune des équations. La lecture du cercle trigonométrique est importante pour la compréhension de la résolution.
Il existe une valeur a (souvent remarquable) pour laquelle on a $\cos(a) = p$ ou $\sin(a) = p$ suivant l'équation à traiter. Ainsi on se ramène à résoudre :

$$\cos(x) = \cos(a) \qquad (1)$$

$$\sin(x) = \sin(a) \qquad (2)$$

<table>
<tr><td>$\cos(x) = \cos(a)$</td><td>$\sin(x) = \sin(a)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$$
avec $k \in \mathbb{Z}$</td><td>$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$$
avec $k \in \mathbb{Z}$</td></tr>
</table>

Exemple-exercice :
Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin(x) = 0,5$
2. $\cos(3x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

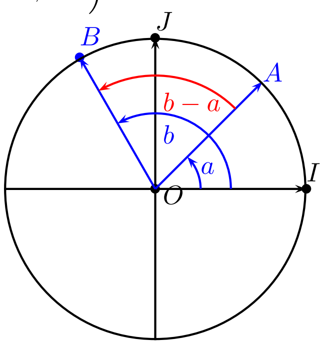
2 Formules du cosinus et du sinus

2.1 Addition

Théorème :
Soit a et b deux nombres réels.

1. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
3. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
4. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

Démonstration :
Considérons le cercle trigonométrique dans un repère $(O; I; J)$ et les points A, B et C tels que :
$\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}\right) = a$ et $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}\right) = b$. Ainsi $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = b - a$.



1. Démonstration de la formule 1) et 2)
   (a) Après avoir donné les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, donner une expression du produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.
   (b) A partir d'une autre expression du produit scalaire, montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$.
   (c) En déduire $\cos(b-a) = \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
   (d) Montrer alors $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
2. A partir de la formule 1), justifier que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.
3. En déduire la formule $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ puis la formule $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

Remarque :

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
3. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

Exemple-exercice :
Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

2.2 Duplication

Théorème :
Soit a et b deux nombres réels.

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
2. $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

Démonstration : évidente avec les formules d'addition

Exemple-exercice :

1. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$
2. Exprimer $\cos(3a)$ en fonction de $\cos(a)$.