

Les vecteurs du plan

Problème ouvert

Toute démarche sera prise en compte.

1 Réalisation : document numérique, imprimé

1. réflexion au brouillon (ne pas rendre)
2. émettre et rédiger vos conjectures.
3. rédaction ordonnée et structurée : les questions que vous vous êtes posées doivent apparaître, la réponse que vous proposez doit être précise.
4. Les démonstrations sont rigoureusement rédigées, les résultats intermédiaires soulignés.
5. Donner des illustrations des résultats obtenus (utiliser les logiciels GeoGebra, algorithmie, tableur ou autre).
6. Si vous souhaitez mettre en évidence plusieurs démonstrations, ou plusieurs démarches pour préciser la réponse ou les réponses, n'hésitez pas à les ajouter.

2 Le problème

Soit une suite $(u)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par un premier terme $u_0 = 2$ telle que pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n.$$

et une suite $(v)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{15}{4} \times 0,5^n$.

1. Déterminer un algorithme permettant de vérifier pour les 10000 premiers termes des suites u et v on a $u_n \geq v_n$.

Dans la suite de l'exercice on admettra que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n \tag{1}$$

2. En déduire que pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
3. Soit la suite $(w)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $w_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.
 - (a) Montrer que la suite w est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et préciser le premier terme de la suite w .
 - (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n , puis w_n en fonction de n et la limite de la suite u .
 - (c) Déterminer le plus petit entier N tel que pour tout entier n supérieur N , $u_n < 0,01$. Donner un algorithme permettant de trouver N .