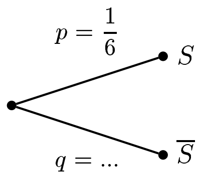
Répétition d'expériences aléatoires

1 Introduction

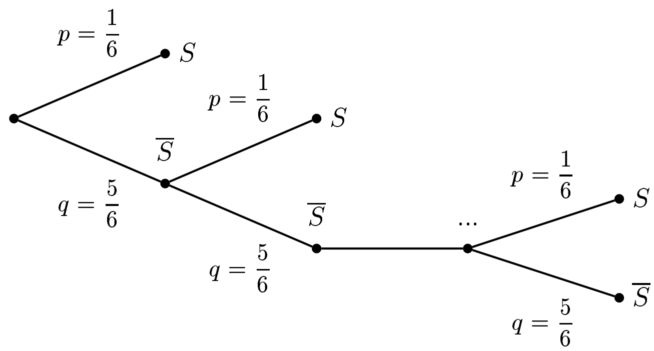
On lance un dé à six faces bien équilibré. On s'intéresse à la probabilité d'obtenir 6. Il y a 2 issues à l'expérience, on appelle S l'événement d'avoir un succès sur l'expérience, c'est à dire obtenir 6, et $\overline{S}$ l'événement contraire. Pour une expérience, on note p la probabilité du succès et q la probabilité de l'échec, $q = 1 - p$. La répétition de l'expérience initiale se fait dans chaque cas de manière identique et indépendante.

1. **Loi de Bernoulli : on lance une seule fois le dé :**
   On note X la variable aléatoire associée au nombre de fois que le succès S apparaît.



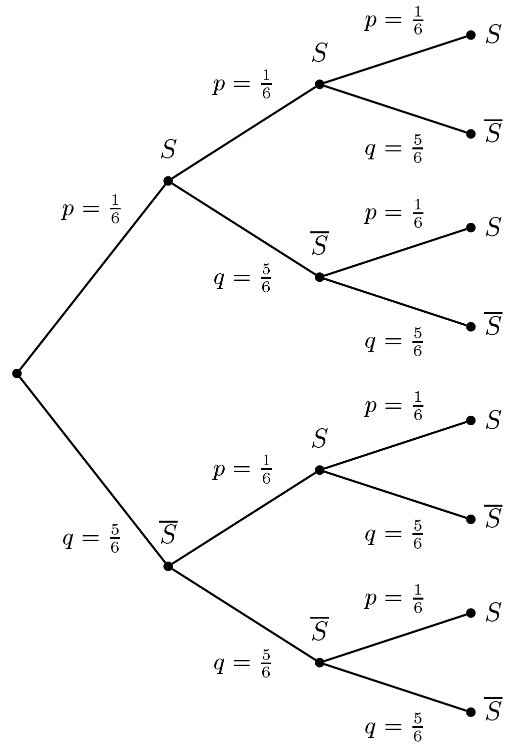
   (a) Donner l'ensemble des valeurs prisent par X.
   (b) Donner la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

2. **Loi géométrique : on lance le dé tant qu'il n'y a pas eu de succès :**
   On note X la variable aléatoire associée au nombre de lancers nécessaires pour voir apparaître le premier succès S.



   (a) Donner l'ensemble des valeurs prisent par X.
   (b) Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$.
   (c) Calculer $P(X \geqslant 4)$.
   (d) Exprimer $P(X \geqslant k)$ en fonction de k. On note u_k la suite telle que $\forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant 1, u_k = P(X \geqslant k)$.
   (e) Montrer que u est décroissante.
   (f) Par un algorithme, déterminer la valeur de k telle que $P(X \geqslant k) < 0,05$.

3. **Loi binomiale : on lance 3 fois le dé :**
   On note X la variable aléatoire associée au nombre de fois que le succès S apparaît.



   (a) Donner l'ensemble des valeurs prisent par X.
   (b) Calculer $P(X = 2)$.
   (c) Donner la loi de probabilité de X.
   (d) Faire un diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X.
   (e) Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

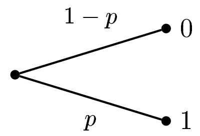
2 Loi de Bernoulli

Définition :
La loi de Bernoulli est une loi de probabilité ayant deux issues (succès ; échec), comme dans un algorithme on associe au succès le nombre 1 et à l'échec le nombre 0. On note X la variable aléatoire qui prend le nombre 0 ou 1. On notera :

- $P(X = 0) = 1 - p$ (généralement noté q)
- $P(X = 1) = p$.

La probabilité p d'avoir un succès est appelée paramètre de la loi de Bernoulli.
On notera $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Représentation de la loi de Bernoulli avec un arbre pondéré :



Théorème : espérance et écart-type d'une loi de Bernoulli
Si X suit une loi de probabilité de Bernoulli de paramètre p, on a :

- espérance E de la variable X : $E(X) = p$
- écart-type σ de la variable X : $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{pq}$

Démonstration : laissée en exercice

Exemple-exercice :
Dans une urne de 10 boules, 6 sont rouges et 4 sont bleues. On admet que toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si la couleur est rouge, on considère que l'expérience est un succès et un échec sinon.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance $E(X)$, puis l'écart-type $\sigma(X)$.

3 Loi binomiale

Définition :
On appelle schéma de Bernoulli de paramètre p la répétition de n expériences aléatoires identiques et indépendantes d'une loi de Bernoulli de paramètre p.
On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p, si X décrit le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres p de n répétitions identiques et indépendantes. On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.

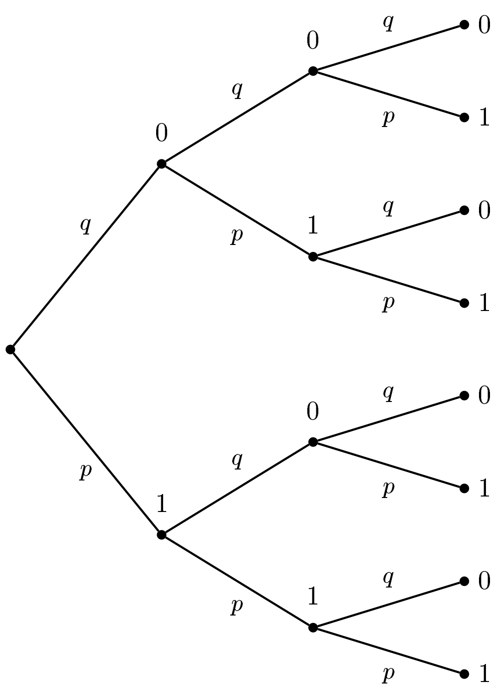
$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$$

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le nombre de chemins qui mènent à k succès parmi n expériences. Ces chemins sont appelés coefficients binomiaux.

Remarque :

- $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p)$
- Pour déterminer la loi de X, on utilisera un arbre pondéré comme décrit dans l'exemple précédent, il permet de compter le nombre de chemins associé au nombre de succès souhaités. Dans le cas où n est grand, on utilisera un algorithme (voir triangle de Pascal) ou la calculatrice.

Exemple d'arbre pour $n = 3$



Remarque pour $n = 3$:
$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$.

Relation entre les coefficient binomiaux

Soit une loi binomiale de n expériences et k un entier compris entre 0 et n.

1. A l'aide d'un arbre donner $\binom{1}{0}$ et $\binom{1}{1}$.
2. Compléter l'arbre et donner $\binom{2}{0}$ et $\binom{2}{1}$ puis $\binom{2}{2}$.
3. Dans la construction de l'arbre à compléter, trouver une relation entre $\binom{3}{2}$ et $\binom{2}{1}$ et $\binom{2}{2}$.
4. Justifier $\boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}$.
5. Justifier $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$.

Le triangle de Pascal :

1	1					n=1
1	2	1				n=2
1	3	3	1			n=3
1	4	6	4	1		n=4
1	5	10	10	5	1	n=5 ...

$$\boxed{\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}}$$

$$\boxed{\binom{n+1}{j+1} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j+1}}$$

Application :

Trouver un algorithme qui permet de calculer le coefficient binomiale pour n et k donné.

Théorème : espérance et écart-type (admis)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale de paramètres p et n, on a :

- espérance E de la variable X : $E(X) = np$
- écart-type σ de la variable X : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple-exercice :

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie de manière identique et indépendante à chaque tirage. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois qu'on obtient Pile.

1. Déterminer la loi de probabilité de X, on pourra utiliser la calculatrice.
2. Donner une représentation graphique de la loi.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.