Fonctions de référence : racine carrée

1 Définition et propriétés

Définition :
La fonction f qui a tout nombre x positif associe le nombre $\sqrt{x}$ est appelée fonction racine carrée :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ = [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Rappel :

- $\forall y \in [0;+\infty[, \exists! x \in [0;+\infty[, x^2 = y$, on note $x = \sqrt{y}$.
  traduction : Pour tout y positif, il existe un unique x positif tel que $x^2 = y$, on note $x = \sqrt{y}$.
- $\forall x \in [0;+\infty[, \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$;
- $\forall x \in [0;+\infty[, \sqrt{x^2} = x$.

Propriétés à démontrer :

1. Montrer que pour deux nombres a et b positifs on a en général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Vous donnerez les valeurs de a et b pour lesquelles il y a égalité.
2. Montrer que pour tout nombre a et b positif, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et pour b non nul, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

2 Variation

Rappel de seconde :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Pour tous nombres a et b de l'intervalle I tels que $a < b$, la fonction f est :

- strictement ***croissante*** sur I si et seulement si $f(a) < f(b)$ (l'ordre est conservé);
- strictement ***décroissante*** sur I si et seulement si $f(a) > f(b)$ (l'ordre est contraire)

Théorème :
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0 $\nearrow$	$+\infty$

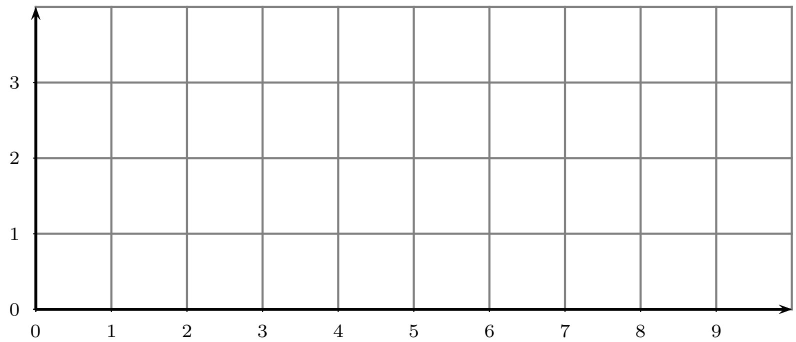
Démonstration :
Soient a et b deux nombres positifs tels que $a < b$. Montrer que $\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$. En déduire les variations de la fonction racine carrée.
On pourra remarquer que $a - b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$.

3 Représentation graphique

Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	4	6,25	9
$\sqrt{x}$										

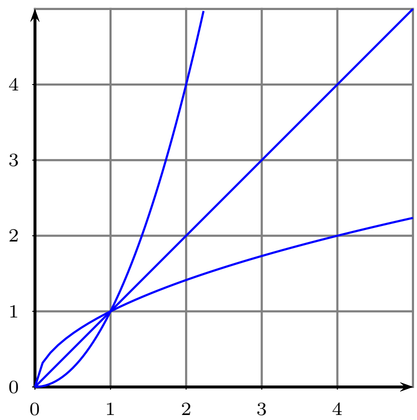
Compléter le graphique par la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$.



4 Position relative avec d'autres courbes

Sur le graphique suivant on a représenté trois courbes associées respectivement aux équations suivantes :

- $y = x$
- $y = x^2$
- $y = \sqrt{x}$



Suivant les valeurs de x, conjecturer un ordre sur x, x^2 et $\sqrt{x}$.
Démontrer votre conjecture.

Note :
Vous devez être capable d'obtenir la fenêtre graphique précédente sur votre calculatrice en réglant la fenêtre :

Xmin	0	Ymin	0
Xmax	5	Ymax	5
Echelle	1	Echelle	1