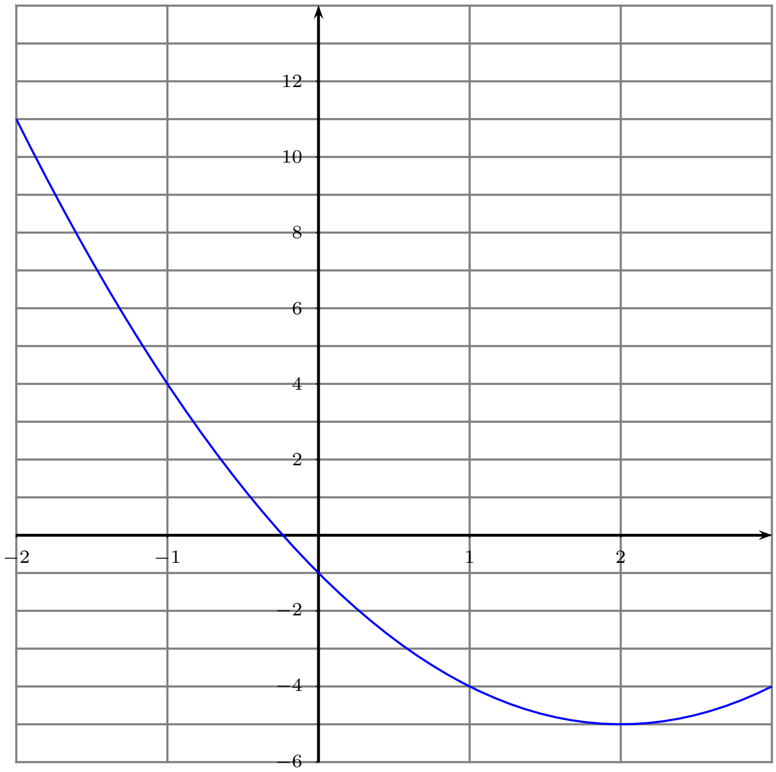
Dérivation

1 Tangente à une courbe, nombre dérivé

Activité :
Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = x^2 - 4x - 1$. On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction f dont on donne la représentation dans le repère suivant :



1. Placer le point A de la courbe dont l'abscisse est -1, puis le point A_h d'abscisse $-1+h$ pour $h = 2$.
   Tracer la droite (AA_h).
   Tracer la droite (AA_h) pour $h = 1$.
2. Soit h un nombre de l'intervalle $[0; 2]$, et A_h le point d'abscisse $-1+h$. Calculer, en fonction de h, la pente $\tau(h)$ de la droite (AA_h).
3. De quel nombre se rapproche $\tau(h)$ lorsque h est très proche de 0 ? Que pouvez-vous dire alors de la droite (AA_h) ?

1.1 Définition

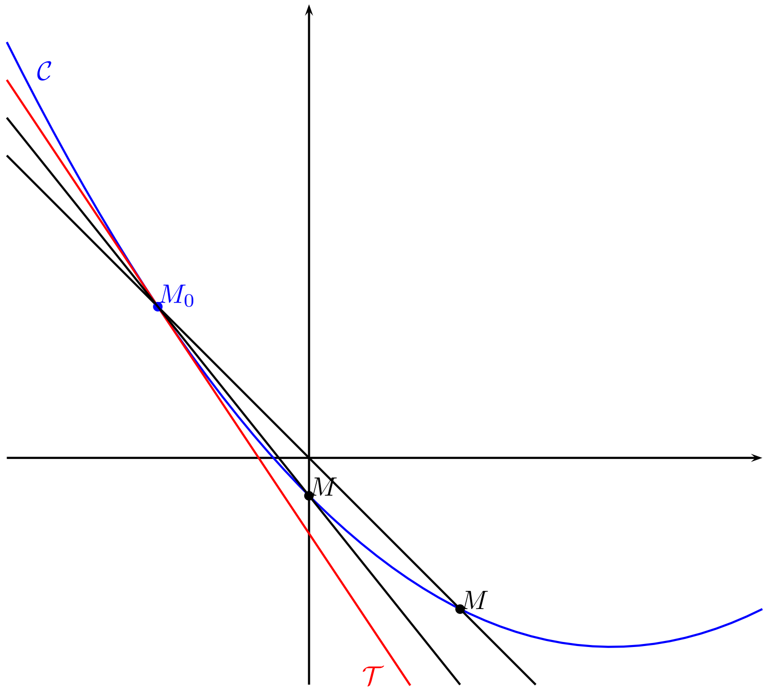
Définition :
Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un nombre de I.
On dit que f est dérivable en a si la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand x tend vers a est finie, on notera cette limite $f'(a)$.
$f'(a)$ est appelé nombre dérivé de f en a.
Les équivalences suivantes sont admises :

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \\ \iff & \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \\ \iff & f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h\epsilon(h), \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0 \end{aligned}.$$

1.2 Interprétation graphique : tangente

Soit une fonction f définie sur un intervalle I, sa représentation dans un repère orthogonal est $\mathcal{C}$; x_0 un nombre de I, $M_0(x_0; f(x_0))$ un point de $\mathcal{C}$. On suppose que f est dérivable en x_0.
pour tout nombre x distinct de x_0, on note le point $M(x; f(x))$ sur la courbe $\mathcal{C}$. La droite (MM_0) a pour coefficient directeur $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Ainsi le nombre $f'(x_0)$ apparaît être la limite de la pente de la droite (MM_0) lorsque le point M est assez proche du point M_0.

Définition :
La droite $\mathcal{T}$ de pente $f'(x_0)$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en M_0.



Théorème :
Soit une fonction f définie sur un intervalle I, sa représentation dans un repère orthogonal est $\mathcal{C}$; x_0 un nombre de I, $M_0(x_0; f(x_0))$ un point de $\mathcal{C}$. On suppose que f est dérivable en x_0.
L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ en x_0 à la courbe $\mathcal{C}$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Démonstration : laissée en exercice

Exercice :
Soit la fonction f définie dans l'activité par $f(x) = x^2 - 4x - 1$.

1. On admet que $f'(-1) = -6$ (valeur trouvée dans l'activité).
   Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f, en -1.
2. (a) En calculant la limite du taux d'accroissement pour $a = 2$ lorsque h tend vers 0, déterminer $f'(2)$.
   (b) En déduire une équation de la tangente en 2.

Figures associées :

- sécantes et tangente à une courbe :
  `http://www.geogebratube.org/student/m135431`
- tangentes à une courbe
  `http://www.geogebratube.org/student/m135433`
- approximation d'une courbe par une tangente
  `http://www.geogebratube.org/student/m135462`

2 Dériver des fonctions

2.1 Définition

Définition :
Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point a de l'intervalle I. On note f' la fonction dérivée de f.

2.2 Fonction de référence

Théorème :
Les fonctions f suivantes sont dérivables sur l'intervalle I, on note f' leur fonction dérivée, k est une constante réelle :

Intervalle I de f	Fonction f	Intervalle I' de f'	Fonction dérivée f'
$]-\infty;+\infty[$	k	$]-\infty;+\infty[$	0
$]-\infty;+\infty[$	x	$]-\infty;+\infty[$	1
$]-\infty;+\infty[$	$mx+p$	$]-\infty;+\infty[$	m
$]-\infty;+\infty[$	$x^n\ (n \geqslant 1)$	$]-\infty;+\infty[$	nx^{n-1}
$]-\infty;+\infty[\cup]-\infty;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;+\infty[\cup]-\infty;+\infty[$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration :
De la même manière que les points traités démontrer le dernier point.

1. Fonction constante, $f(x) = k$:
   $\forall a \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, f(a+h) = k = f(a) + 0.h + h.\epsilon(h)$, avec $\forall h \in \mathbb{R}, \epsilon(h) = 0$.
   D'où $f'(a) = 0$.

2. Fonction identité, $f(x) = x$:
   $\forall a \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, f(a+h) = a+h = f(a) + 1.h + h.\epsilon(h)$, avec $\forall h \in \mathbb{R}, \epsilon(h) = 0$.
   D'où $f'(a) = 1$.

3. Fonction affine, $f(x) = mx+p$:
   $\forall a \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, f(a+h) = ma+p+mh = f(a) + m.h + h.\epsilon(h)$, avec $\forall h \in \mathbb{R}, \epsilon(h) = 0$.
   D'où $f'(a) = m$.

4. Fonction puissance, $f(x) = x^n$ (à revoir avec les coefficient binomiaux en probabilité) :
   D'après le développement de Pascal, on a $f(a+h) = \sum\limits_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a^{n-i}.h^i$.
   $f(a+h) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}.h + \sum\limits_{i=2}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a^{n-i}.h^i = f(a) + na^{n-1}.h + \sum\limits_{i=2}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a^{n-i}.h^i$
   En posant $h.\epsilon(h) = h.\sum\limits_{i=2}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a^{n-i}.h^{i-1}$, et par les opérations sur les limites, en admettant $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$, on en déduit $f'(a) = na^{n-1}$.

5. Fonction inverse, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, on se placera sur $\mathbb{R}_+^*$, le raisonnement étant identique sur $\mathbb{R}_-^*$:
   $\forall a \in]0;+\infty[, \forall h \in]0;+\infty[, f(a+h) = \dfrac{1}{a+h} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}h + h\dfrac{h}{a^2(a+h)}$ (pour le montrer, réduire la forme donnée).
   En posant $\epsilon(h) = \dfrac{h}{a^2(a+h)}$, on admet $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.
   Ainsi $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

6. (à vous de jouer) Fonction racine carrée, $f(x) = \sqrt{x}$:

   (a) Montrer que pour tout a dans $\mathbb{R}_+^*$ et tout h dans $\mathbb{R}_+$,$f(a+h) = \sqrt{a} + h.\dfrac{1}{2\sqrt{a}} + h.\epsilon(h)$ avec $\epsilon(h) = \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} - \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

   (b) Montrer que $\forall h \in [0;+\infty[, \epsilon(h) = \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} - \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.
   Vous remarquerez que a doit être non nul.

   (c) Calculer $\epsilon(0)$, que pouvez-vous dire de $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h)$?

   (d) Conclure sur $f'(a)$.

Autre démonstration :
Reprendre toutes les fonctions de référence et calculer le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ puis conclure à partir de la limite de ce taux en 0.

Remarque :
Pour tous ces points, dans la pratique, la variable a sera remplacée par la variable x, sauf éventuellement pour les tangentes à une courbe en un point d'abscisse a ou x_0.

Exemple-Exercice :
Déterminer l'équation réduite de la tangente en $x_0 = 1$ à chaque courbe des fonctions de référence.

2.3 Opération sur les fonctions dérivées

Théorème :
Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}^*$. Les fonctions ku, $u+v$, uv, $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont respectivement dérivables sur I suivant les formules du tableau suivant :

f	f'
ku	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exercice-exemple :
Identifier les fonctions u, v et le nombre k, puis donner $f'(x)$:

1. $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$
2. $f(x) = 3x^2 - 7x + 1 + \dfrac{1}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$
3. $f(x) = 8x^4$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{3}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$
5. $f(x) = \dfrac{3x+1}{7x-2}$ sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{7}\right\}$
6. $f(x) = x^3 - x - \dfrac{1}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$

7. $f(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - \dfrac{2}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$
8. $f(x) = 5 + \dfrac{4x}{2x-1}$ sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

3 Application aux fonctions dérivées

3.1 Sens de variation d'une fonction

Théorème :
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, on note f' sa fonction dérivée.

- $(\forall x \in I, f'(x) < 0) \Leftrightarrow (f$ strictement décroissante sur $I)$.
- $(\forall x \in I, f'(x) > 0) \Leftrightarrow (f$ strictement croissante sur $I)$.
- $(\forall x \in I, f'(x) = 0) \Leftrightarrow (f$ constante sur $I)$.

Figure animée associée :
`http://www.geogebratube.org/student/m135468`

Exemple-exercice :
Pour chacune des fonctions, étudier le sens de variations sur un ensemble I approprié, vérifier vos réponses à l'aide de la calculatrice et d'une fenêtre appropriée.

1. $f(x) = x^2 - 5x + 2$
2. $f(x) = \dfrac{3x+1}{5x-2}$
3. $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{3}{2x+3}$

3.2 Recherche d'extremum

Théorème :
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I =]a; b[$, on note f' sa fonction dérivée.
Soit $x_0 \in I$,

- $f(x_0)$ est un maximum sur I si et seulement si $(f'(x_0) = 0) \wedge (\forall x < x_0; f'(x) > 0) \wedge (\forall x > x_0; f'(x) < 0)$.
- $f(x_0)$ est un minimum sur I si et seulement si $(f'(x_0) = 0) \wedge (\forall x < x_0; f'(x) < 0) \wedge (\forall x > x_0; f'(x) > 0)$.

Exemple-exercice :

1. Soit la fonction cube f, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3$, montrer que $f'(0) = 0$ et que $f(0)$ n'est pas un extremum.
2. Soit la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, montrer que la fonction f admet un extremum local.

figures de l'exercice :