Le second degré ou polynôme du second degré

1 Définition (seconde)

Définition :
Soit f une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, par l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a est un nombre réel non nul et b et c deux nombres réels.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = ax^2 + bx + c \end{array}$$

La fonction f est dite du second degré ou ***fonction polynôme du second degré***.
Une solution éventuelle de l'équation $f(x) = 0$ est appelée ***racine*** de la fonction polynôme du second degré f.

Exercice :
Soit le fonction f définie pour tout nombre $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

1. Montrer que pour tout x réel, $f(x) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right]$.
2. En déduire une forme factorisée de $f(x)$ et le signe de l'expression $f(x)$.
3. Donner et justifier les variations de la fonction f.

2 Forme canonique

Théorème :
Soit une f du second degré d'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Pour tout x réel, on a $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$; avec $\Delta = b^2 - 4ac$.
Δ est appelé discriminant de la fonction du second degré f.

Démonstration : laissée à faire

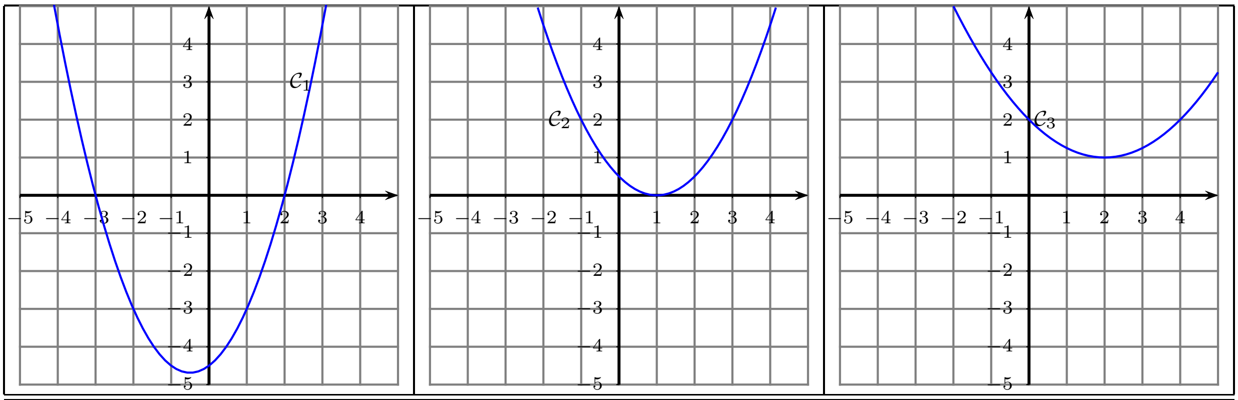
Exercice-exemple :
Déterminer les formes canoniques dans les cas suivants :

1. $f(x) = 16x^2 - 24x + 9$
2. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
3. $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

3 Factorisation

Activité :
Soit l'expression du second degré : $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$; avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Que pouvez-vous dire du signe de $f(x)$ si $\Delta < 0$? Donner un exemple algébrique d'illustration.
2. Écrire $f(x)$ si $\Delta = 0$. Que pouvez-vous dire du signe de $f(x)$?
3. Dans les trois cas suivants, on choisit $a > 0$, associer à chaque graphique son discriminant et le nombre de solution à l'équation $f(x) = 0$:



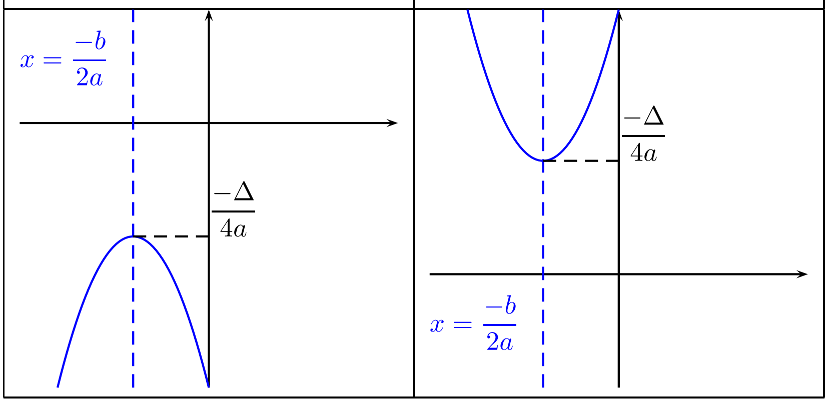
$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
aucune solution	une seule solution	deux solutions

Théorème :

Soit l'expression du second degré : $f(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$; avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

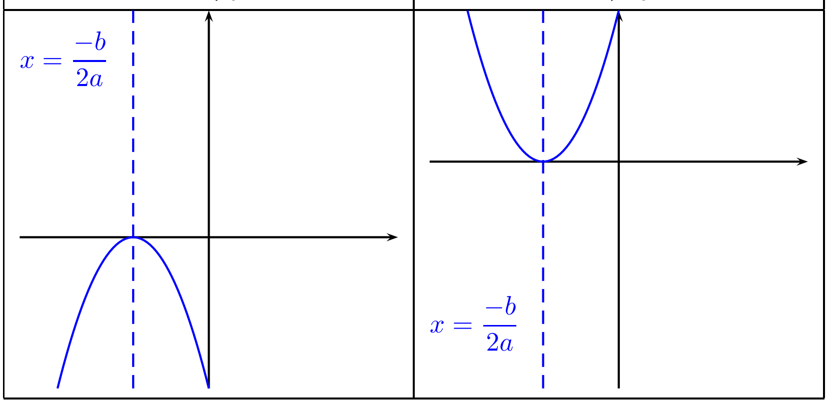
1. si $\Delta < 0$ alors :
   - la ***factorisation*** de $f(x)$ est impossible
   - l'***équation*** $f(x) = 0$ n'admet aucune solution (réelle)
   - le ***signe de*** $f(x)$ est celui de a.

$a < 0$	$a > 0$



2. si $\Delta = 0$ alors :
   - la ***factorisation*** est $f(x) = a\left(x - \dfrac{-b}{2a}\right)^2$
   - l'***équation*** $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
   - le ***signe de*** $f(x)$ est celui de a.

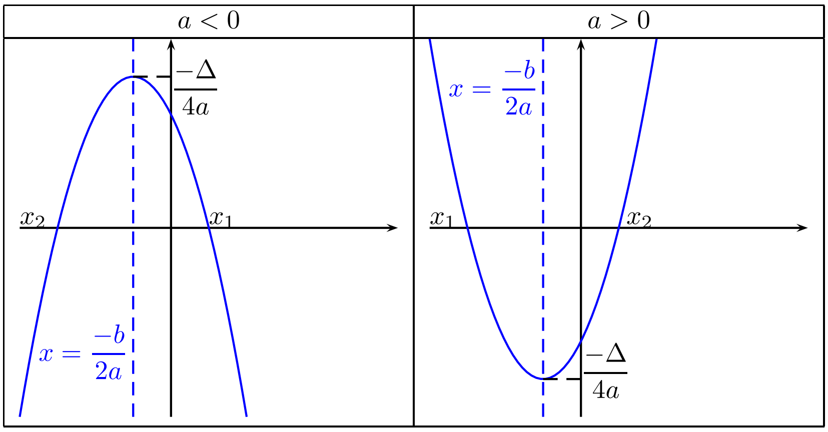
$a < 0$	$a > 0$



3. si $\Delta > 0$ alors :

   - la ***factorisation*** est de la forme $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$
   - l'***équation*** $f(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
   - le ***signe de*** $f(x)$ est :

x	$-\infty$		x_1 (ou x_2)		x_1 ou (x_2)		$+\infty$
$f(x)$		*signe*(a)	0	*signe*(-a)	0	*signe*(a)	



Démonstration : laissée en exercice
pour Δ positif ou nul, utiliser les identités remarquables.

Exemple-exercice :
Pour chacune des expressions, trouver la factorisation puis le signe :

1. $f_1(x) = 3x^2 - 2x - 1$
2. $f_2(x) = -x^2 + 5x + 6$
3. $f_3(x) = 2x^2 - 3x + 7$
4. $f_4(x) = 0,5x^2 + 2x + 2$

Remarques-exercice : relations entre les racines

Soit l'expression du second degré : $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = ax^2 + bx + c$; avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

si $\Delta > 0$, on note $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, montrer que :

- $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$
- $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-b}{2a}$ soit $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

figure géogébra associée :
`https://www.geogebratube.org/student/m135058`